ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
88

For Senior & Graduate Courses

演習形式で学ぶ
リー群・リー環

示野 信一 著



サイエンス社

SGC ライブラリ-88

演習形式で学ぶ
リー群・リー環

示野 信一 著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for Senior & Graduate Courses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～32 省略（品切含）

33 工学のための非線形解析入門
藪野浩司著　本体 1857 円

34 経済における確率的モデルへの招待
青木正直著／青山・藤原 監訳　本体 1886 円

35 賭けの数理と金融工学
竹内啓著　本体 1429 円

36 応用のための確率論・確率過程
松本裕行著　本体 1876 円

38 複素ニューラルネットワーク
廣瀬明著　本体 1695 円

40 制御理論講義
木村英紀著　本体 1886 円

41 バイオインフォマティクスの基礎
冨田勝監修　斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 トポロジー入門
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 アルゴリズムと計算量
谷聖一著　本体 1857 円

44 ゲーム理論のフロンティア
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

47 現代物理数学への招待
鈴木淳史著　本体 1876 円

49 ソリトンと物理学
戸田盛和著　本体 1876 円

50 確率的情報処理と統計力学
田中和之編著　本体 1857 円

51 超対称性理論
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

52 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何
谷村省吾著　本体 1886 円

53 ゲノム進化を考える
斎藤成也著　本体 1429 円

54 非平衡統計力学
早川尚男著　本体 1790 円

55 超幾何関数入門
木村弘信著　本体 1857 円

56 相対性理論
三尾典克著　本体 1838 円

57 3 次元トポロジーの新展開
戸田正人著　本体 1867 円

58 数理・情報系のための整数論講義
木田雅成著　本体 1876 円

59 コンピュータ将棋の頭脳
小谷善行著　本体 1429 円

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 演習くり込み群
柏太郎著　本体 1886 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著　本体 1886 円

64 代数幾何入門講義
小林正典著　本体 1876 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 物理のためのリー群とリー代数
窪田高弘著　本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著　本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 重点解説 基礎微分幾何
塩谷隆著　本体 1886 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著　本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著　本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著　本体 1781 円

75 数物系のための圏論
梶浦宏成著　本体 2143 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著　本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著　本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著　本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著　本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著　本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著　本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著　本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著　本体 2238 円

84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象
宮下精二・轟木義一 共著　本体 2476 円

85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算
中尾充宏・渡部善隆 共著　本体 2362 円

86 リーマン予想の数理物理
黒川信重・小山信也 共著　本体 2190 円

87 量子多体系の物理
藤本聡・川上則雄 共著　本体 2190 円

88 演習形式で学ぶリー群・リー環
示野信一著　本体 2381 円

まえがき

本書は，大学初年級で学ぶ数学の基礎である微分積分と線形代数を用いて，リー群とリー環について解説することを目的としている．リー理論は，リー群とそのリー環を舞台とする，微分積分と線形代数の両方が交差する魅力的な数学である．

リー群とリー環は大学の学部の標準的コースでは教えられないが，大学院レベルになると常識として必要になってくる重要な話題であり，これについて問題演習を通して自習できる書籍を書いてもらいたいというお話を頂いた．リー群とリー環，そしてその表現論は，数学の様々な分野や物理学に現れること，また，具体例が豊富であり，実例の計算を通して身に着けていけることから，企画に賛同して執筆をお引き受けした．

本書で取り扱うのは，リー理論（行列のリー群とそのリー環の対応）とカルタン・ワイル理論（コンパクトリー群，複素半単純リー環の有限次元表現論）である．

リー群のうち行列のなす群に限って，リー理論を学部程度の数学を用いて展開するという本書の方針は，フォン・ノイマンの論文[26] に端を発するもので，[12], [18, Introduction], [19], [29], [35], [39] によって整備された道筋を本書ではたどった．行列の群やリー環の実例を豊富に盛り込んだが，例に終始するだけでなく，位相や多様体など微分積分・線形代数を越える事項も含めて，リー理論をきちんと解説するよう努めた．筆者自身が学生時代に [32], [2], [5] でリー理論を学んだのとは少し違う道筋をたどるのは，楽しい経験だった．

カルタン・ワイル理論については，群では $SU(2)$ と $SU(3)$，リー環では $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合に限って，既約有限次元表現の分類について解説した．ルート系，ワイル群，表現などの概念は，まず具体的な群やリー環で計算してみるほうが，少ない労力で考え方をつかむことができ，表現の初歩を学ぶことにより，リー群やリー環の構造論の必要性が理解しやすくなると考えたからである．対象とするリー群やリー環の表現の取り扱いについて，[7], [8], [17], [37] を参照した．

本書のリー理論の部分は，関西学院大学大学院での講義と連動して準備した．受講者は，数学系の大学院生とはいえ専門は様々であり，多くの予備知識を前提とすることはできない．受講者たちに理解してもらえる内容を念頭に執筆した．

演習問題は本文や例題を理解していれば無理なく解ける水準を意図して与えたが，読者の便宜のため，いくつかについて巻末に方針，ヒントを記した．

編集者，学生，大学の同僚，数学者仲間，家族など，様々な方々のおかげで，何とか本書を形にすることができたことに深く感謝する．

2011 年 11 月　晩秋の裏六甲にて

著者しるす

目　次

第 1 章　リー理論の概観 **1**

第 2 章　回転群とその一般化 **7**
2.1　群 7
2.2　平面の回転 10
2.3　直交群 14
2.4　ユニタリ群 15
2.5　シンプレクティック群 17
2.6　一般線形群とその閉部分群 19
2.7　四元数とシンプレクティック群 23
2.8　閉線形群の等質空間 29
2.9　鏡映 33

第 3 章　行列の指数関数 **34**
3.1　微分方程式と行列の指数関数 34
3.2　行列の無限級数の収束 36
3.3　指数写像の性質 39
3.4　行列の対数関数 43

第 4 章　閉線形群のリー環 **50**
4.1　閉線形群のリー環 50
4.2　直交群のリー環 53
4.3　$SL(n,\mathbb{K})$ と $SU(n)$ のリー環 56
4.4　$Sp(n,\mathbb{K})$ のリー環 58
4.5　リー環の複素化 59
4.6　リー環上の指数写像 60
4.7　リー環の定義と基本概念 65

第 5 章　3 次元空間の回転 **70**
5.1　$SO(3)$ と $\mathfrak{so}(3)$ 70
5.2　$SU(2)$ と空間の回転 73
5.3　メービウス変換と空間の回転 78
5.4　$\mathbb{R}^4$ の回転 83

第 6 章　線形群の位相 **85**
6.1　ユークリッド空間の位相 85
6.2　線形群の位相 89
6.3　リー群 96
6.4　等質空間の位相 98
6.5　単連結性 99

第 7 章　閉線形群の間の準同型写像 **102**
7.1　ディンキンの公式 102
7.2　準同型写像とその微分 106
7.3　表現 110
7.4　被覆群の例 113
7.5　リーの対応 114

第 8 章　$SU(2)$ と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 **116**
8.1　$SU(2)$ の表現とその微分 116
8.2　$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現 121
8.3　$SO(3)$ の表現 125
8.4　表現のテンソル積 126
8.5　完全可約性 129
8.6　シューアの補題 133

第 9 章　$SU(3)$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現 **135**
9.1　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ のルート分解 135
9.2　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現のウェイト 139
9.3　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現 146
9.4　ワイル群 149

第 10 章 極大トーラス **157**
10.1 一般化された回転群の極大トーラス 157
10.2 閉線形群の中心 160
10.3 極大トーラスの共役類 162

付録 A　演習問題の方針，ヒント **168**

参考文献 **171**
索　引 **173**

第 1 章
リー理論の概観

冒頭に本書のテーマであるリー群とリー環について簡単な例で概観しておく．

平面の回転群

まず複素平面の回転を考えよう．任意の複素数 $z = x + iy$（x, y は実数，i は虚数単位）と座標平面上の点 (x, y) を対応させる．z の位置は，極座標，つまり原点との距離 r と角度 φ（原点から見た方向）により指定することもできて，

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

と表すことができる．z に絶対値 1 の複素数 $e^{i\theta}$ をかけることは，複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とする角 θ の回転を表す．実際，

$$e^{i\theta}z = e^{i\theta}re^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)}$$

となる．こうして絶対値が 1 の複素数全体の集合

$$\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

は，原点を中心とする回転の全体と見ることができる．またこれを複素平面上の図形と見れば，原点を中心とする半径 1 の円周である（次頁図 1.1 参照）．$\mathbb{T}$ には回転の合成，逆回転が定義されている．複素数の演算でいえば，$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ であり，$\mathbb{T}$ は群になる．$\mathbb{T}$ は図形であるとともに群であるという密接に結びついた 2 つの側面を持っている．$\mathbb{T}$ はこれら 2 つの側面を持つ**リー群**と呼ばれるものの一つである．

$\mathbb{T}$ をパラメーター表示された曲線 $z(\theta) = e^{i\theta}$ と見て，θ で微分すると $z'(\theta) = ie^{i\theta}$ となるから，1 における接ベクトルは $z'(0) = i$ である．接ベクトル i は「無限小回転」というべきものである．この接ベクトル i を方向ベクトルとする直線 $\mathfrak{t} = \mathbb{R}i$ を指数関数で写したものが $\mathbb{T}$ にほかならない．接ベクトル空間 $\mathfrak{t}$ はリー群 $\mathbb{T}$ の**リー環**と呼ばれる．（実数 u に対して，$\mathbb{T}$ 内の曲線 $\theta \mapsto e^{iu\theta}$ の 1 における接ベクトルは ui であるから，接ベクトルの定数倍を許してベクトル空間をなすと考えるのは理にかなっている.）

$$\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathfrak{t} = \mathbb{R}i$$

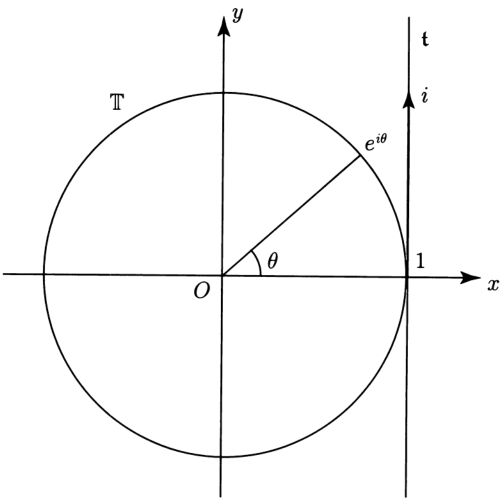


図 1.1 $\mathbb{T}$ とそのリー環 $\mathfrak{t}$.

上で述べた複素平面の回転群 $\mathbb{T}$ とそのリー環 $\mathfrak{t}$ の対応を，座標平面の線形変換を表す行列として見てみよう.

> **例題 1.1**
> (1) $z = x + iy$ として，複素平面の回転 $z \mapsto e^{i\theta}z$ の実部と虚部をとって，回転を表す 2×2 行列 $R(\theta)$ を求めよ.
> (2) $X = R'(0)$ を求めよ.
> (3) 上で求めた X に対して $e^{\theta X} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j X^j}{j!}$ を求めよ.

解答 (1) $e^{i\theta}z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + i\,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$ より，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}z) \\ \mathrm{Im}\,(e^{i\theta}z) \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(2) $X = R'(0) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) $X^2 = -\mathbf{1}$（単位行列）より，$X^3 = -X$, $X^4 = \mathbf{1}, \ldots$ だから，

$$\begin{aligned} e^{\theta X} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j X^j}{j!} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\mathbf{1} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)X \\ &= (\cos\theta)\mathbf{1} + (\sin\theta)X = R(\theta). \end{aligned}$$

（cos と sin のマクローリン展開を用いた.） □

上の解答は，$\mathbb{T}$ の場合と並行している．2×2 実行列の全体 $M(2,\mathbb{R})$ は，$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in M(2,\mathbb{R})$ に $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$ を対応させることにより，$\mathbb{R}^4$ と同

一視することができる．原点を中心とする角 θ の回転行列は $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ であり，これを θ をパラメーターとする $M(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ 内の曲線と見ると，単位行列における接ベクトルは $X = R'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．指数関数のマクローリン展開にならって**行列の指数関数**を

$$e^{\theta X} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j X^j}{j!}$$

により定義すると，無限小回転行列 X から回転行列 $R(\theta)$ を $e^{\theta X} = R(\theta)$ により得ることができる．$R(\theta)$ は行列式が 1 の直交行列の一般形を与えており（例題 2.3 解答参照），その全体がなす群は $SO(2)$ と書かれる． そして $SO(2)$ のリー環 $\mathfrak{so}(2)$，つまり単位行列における接ベクトル空間は直線 $\mathbb{R}X$ である．したがって，微分と指数関数により次の対応がある．

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathfrak{so}(2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

演習問題 1.1

行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

の固有値はそれぞれ $\pm i\theta, e^{\pm i\theta}$ であることを示せ．

空間の回転群

上で述べた平面の回転群 $\mathbb{T}$ あるいは $SO(2)$ は，連続なパラメーターを持ち，パラメーターについて微分することができる．この点が群の例としてよく現れる加法群 $\mathbb{Z}$（整数全体）や n 次対称群 S_n とは異なるリー群の特徴の一つである．

もう少し複雑な例として，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転を考えよう．空間の回転は物体の運動に関係しており，ロボットアームの動作の解析やコンピューターグラフィックスのプログラミングなど応用上も重要である．

座標空間の原点を中心とする回転とは，行列式が 1 の 3 次直交行列 A による線形変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

に他ならない．実数を成分とする 3×3 行列 A が**直交行列**であるとは，${}^t\!AA = \mathbf{1}$ を満たすことをいう．ここで ${}^t\!A$ は A の転置行列，つまり A の行と列を入れ替えた行列，$\mathbf{1}$ は単位行列を表す．空間の回転行列の全体を

$$SO(3) = \{A : 3 \times 3 \text{ 実行列}, {}^tAA = \mathbf{1}, \det A = 1\}$$

とおく．ここで，$\det A$ は A の行列式を表す．$SO(3)$ は行列の積について群になる．$SO(3)$ を**空間の回転群**と呼ぶ．$SO(3)$ はリー群の一例である．

空間の回転群については第 5 章で詳しく述べるが，ここでは平面の回転群の場合を真似て単位行列における接ベクトル空間を調べてみよう．$SO(3)$ は 3×3 実行列の全体 $M(3,\mathbb{R})$ に含まれている．$M(3,\mathbb{R})$ の行列 $X = (X_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ の 9 つの成分を 1 行目から順に並べて $(X_{11}, X_{12}, \cdots, X_{33}) \in \mathbb{R}^9$ と考える．$SO(3)$ 内の滑らかな曲線とは，$\mathbb{R}$ のある区間に含まれるパラメーター t を持つ $M(3,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$ 内の無限回微分可能な曲線 $c(t)$ で $c(t) \in SO(3)$ を満たすものとする．今 $c(0) = \mathbf{1}$ を満たす $SO(3)$ 内の滑らかな曲線 $c(t)$ に対して，その $\mathbf{1}$ における接ベクトル

$$c'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{c(t) - \mathbf{1}}{t}$$

の全体を $\mathfrak{so}(3)$ とする．

$$\mathfrak{so}(3) = \{c'(0) : c(t) \text{ は } c(0) = \mathbf{1} \text{ を満たす } SO(3) \text{ 内の滑らかな曲線}\}.$$

$\mathfrak{so}(3)$ を求めよう．

例題 1.2

(1) $\mathfrak{so}(3)$ は実ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $X \in \mathfrak{so}(3)$ は交代行列であることを示せ．

(3) x, y, z 軸の周りの角 θ の回転行列 $R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$ を求めよ．ただし回転は右ねじの向きとする．また $SO(3)$ は可換でないことを示せ．

(4) 上の (3) で求めた回転行列をパラメーター θ について微分して，対応する $\mathfrak{so}(3)$ の元を求めよ．その結果を用いて $\mathfrak{so}(3)$ は 3×3 実交代行列全体の集合であることを示せ．

(5) $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ ならば $XY - YX \in \mathfrak{so}(3)$ であることを示せ．

解答 (1) $X_1, X_2 \in \mathfrak{so}(3)$ とする．$j = 1, 2$ に対して $c_j(t)$ を $t = 0$ の近くで定義された $SO(3)$ 内の滑らかな曲線で $c_j(0) = \mathbf{1}, c_j'(0) = X_j$ を満たすものとする．$c(t) = c_1(t)c_2(t)$ は $c(0) = \mathbf{1}$ を満たす $SO(3)$ 内の滑らかな曲線になる．微分すると，$c'(t) = c_1'(t)c_2(t) + c_1(t)c_2'(t)$ となる（行列の積についてスカラー値関数の場合と同じ形の積の微分の公式が成り立つことは容易にわかる）．$t = 0$ を代入すると，$c'(0) = X_1 + X_2$ となり，$X_1 + X_2 \in \mathfrak{so}(3)$ がわかる．任意の実数 u に対して $c(t) = c_1(ut)$ とおくと，$c(t)$ は $c(0) = \mathbf{1}$ を満たす $SO(3)$ 内の滑らかな曲線である．$c'(0) = uc_1'(0) = uX_1$ より $uX_1 \in \mathfrak{so}(3)$ となる．したがって，$\mathfrak{so}(3)$ は実ベクトル空間である．

(2) $c(t)$ を $t = 0$ の近くで定義された $SO(3)$ 内の滑らかな曲線で $c(0) = \mathbf{1}, c'(0) = X$ を満たすものとする．$c(t) \in SO(3)$ より，${}^tc(t)c(t) = \mathbf{1}$ である．t で微分すると，${}^tc'(t)c(t) + {}^tc(t)c'(t) = 0$ となる．$t = 0$ とすると，${}^tX + X = 0$，つまり X は交代行列である．

(3) x 軸の周りの回転は x 軸上の任意の点を固定し，yz 平面上では例題 1.1 (1) で求め

た平面の回転である．他の座標軸についても同様に考えて，

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．たとえば，$A = R_x\left(\frac{\pi}{2}\right), B = R_y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で $AB \neq BA$ となり，$SO(3)$ は可換でないことがわかる．

(4)

$$R'_x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'_y(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'_z(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{so}(3)$ の元である．(1) より $\mathfrak{so}(3)$ はベクトル空間だから，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ に対して

$$\alpha R'_x(0) + \beta R'_y(0) + \gamma R'_z(0) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3),$$

つまり任意の実交代行列は $\mathfrak{so}(3)$ に含まれる．(2) と合わせて，$\mathfrak{so}(3)$ は 3 次の実交代行列全体の集合に一致することがわかる．

(5) $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$，つまり (4) より X, Y は 3 次の実交代行列とすると，

$$^t(XY - YX) = {}^tY\,{}^tX - {}^tX\,{}^tY = (-Y)(-X) - (-X)(-Y) = -(XY - YX)$$

より $XY - YX \in \mathfrak{so}(3)$ である． □

3 次回転群 $SO(3)$ の単位行列における接ベクトル空間として 3 次実交代行列の全体 $\mathfrak{so}(3)$ が得られる．

$$SO(3) \quad \longleftrightarrow \quad \mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

平面の回転群の場合と同様に，$\mathfrak{so}(3)$ から $SO(3)$ への対応は行列の指数関数により与えられることを後に示す（例題 5.3）.

3 次実交代行列の全体 $\mathfrak{so}(3)$ は行列の積について閉じていないが，**カッコ積** $[X, Y] = XY - YX$ について閉じている．$\mathfrak{so}(3)$ を $SO(3)$ のリー環と呼ぶ．この例にとどまらず，一般に行列のリー群のリー環（単位行列における接ベクトル空間）が，ベクトル空間であるだけでなく，カッコ積について閉じていることが後に重要な意味を持つ．$SO(3)$ と $\mathfrak{so}(3)$ の対応もリー群とリー環の対応の一例である．リー群とリー環の対応が驚くほど豊富で有用な内容を持つことを明かすのが**リー理論**であり，その一端を紹介することが本書の目的である．

第 2 章
回転群とその一般化

この章では，平面の回転群 $SO(2)$，空間の回転群 $SO(3)$ の一般化として，特殊直交群 $SO(n)$ を導入する．$SO(n)$ は n 次直交行列全体のなす群 $O(n)$ の中で行列式が 1 であるもの全体のなす部分群である．

直交群 $O(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッド内積を保つ線形変換の全体と同一視される．直交群の一般化として，$\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1\bar{v}_1 + \cdots + u_n\bar{v}_n \quad (\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n)$$

を保つ線形変換全体のなす群としてユニタリ群 $U(n)$，行列式が 1 の行列からなる $U(n)$ の部分群 $SU(n)$ が定義される．

もう一つの一般化は，四元数体 $\mathbb{H}$ の直積 $\mathbb{H}^n$ 上で四元数の共役を用いてエルミート内積の類似を考え，その内積を保つ線形変換全体のなす群として定義されるシンプレクティック群 $Sp(n)$ である．シンプレクティック群は $\mathbb{C}^{2n}$ 上の非退化交代形式（シンプレクティック形式）を不変にするユニタリ変換全体のなす群と同型である．

これらの一般化された回転群は，本書のテーマである行列の群の中で古典型コンパクト群と呼ばれる重要なクラスをなす．

2.1 群

群について本書で用いる基本的な用語の定義を与えておく．

定義 2.1
集合 G が**群**であるとは，G の任意の $x,\, y \in G$ に対してその積 $xy \in G$ が定まっていて，次の 3 条件が成り立つことをいう．

(i) 任意の $x,\, y,\, z \in G$ に対して $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ（結合法則）．

(ii) $e \in G$ が存在して，すべての $x \in G$ に対して $xe = ex = x$ が成り立つ（単位元の存在）．

(iii) 任意の $x \in G$ に対して，$x^{-1}x = xx^{-1} = e$ を満たす $x^{-1} \in G$ が存在する（逆元の存在）．

G, H が群であるとき，直積

$$G \times H = \{(g, h) : g \in G,\ h \in H\}$$

は，$(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ の積を $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ により定めることにより群になる．これを G と H の**直積群**と呼ぶ．(3 個以上の群の直積群も同様に定義される.)

例 2.1

(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は加法に関して群をなす.

(2) ゼロを除く実数全体 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$，ゼロを除く複素数全体 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は乗法に関して群をなす.

(3) 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身の上への全単射を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換と呼ぶ. $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換の全体は写像の合成を積として群をなす．これを n 次**対称群**と呼ぶ.

(4) 第 1 章で現われた，$\mathbb{T}$, $SO(2)$, $SO(3)$ は乗法に関して群をなす．行列の群の例はこの章でさらに扱っていく.

演習問題 2.1

n 次対称群の元 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように書き表す.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを確かめよ.

定義 2.2

(1) 群 G の部分集合 H が**部分群**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう.
  (i) G の単位元 e が H に含まれる.
  (ii) $x \in H$ ならば $x^{-1} \in H$.
  (iii) $x, y \in H$ ならば $xy \in H$.

(2) 群 G の部分群 H が**正規部分群**であるとは，任意の $g \in G$ に対して $gHg^{-1} = H$ となることをいう.

H が G の部分群であるとき，$g \in G$ に対して，

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

を G における H の**右剰余類**という．$g_1 H = g_2 H$ となるのは，$g_1^{-1} g_2 \in H$ となるときに限る．また，2 つの右剰余類は一致するか共通部分を持たないかのいずれかである．実際，$g \in g_1 H \cap g_2 H$ とすると，

$$g = g_1 h_1 = g_2 h_2 \quad (h_1,\, h_2 \in H)$$

と書けるから，$g_1 = g_2 h_2 h_1^{-1} \in g_2 H$，したがって，$g_1 H = g_2 H$ となる．

H が G の正規部分群であるとき，右剰余類どうしの積が

$$g_1 H \cdot g_2 H = g_1 g_2 H$$

によりうまく定義できる．この定義は，剰余類の代表元 g_1, g_2 の取り方によらない（演習問題 2.2）．そして，右剰余類の全体は群をなす．これを G の H による**剰余群**と呼び，G/H と書き表す．

演習問題 2.2

H は群 G の正規部分群であるとする．$g_1, g_1', g_2, g_2' \in G$ が $g_1 H = g_1' H, g_2 H = g_2' H$ を満たすとき，$g_1 g_2 H = g_1' g_2' H$ であることを示せ．

定義 2.3

群 G が**可換**であるとは，任意の $x, y \in G$ に対して，$xy = yx$ が成り立つことをいう．

演習問題 2.3

例 2.1 の群の中で可換でないものはどれか．

定義 2.4

群 G から群 G' への写像 $f : G \to G'$ が**準同型写像**であるとは，任意の $x, y \in G$ に対して $f(xy) = f(x)f(y)$ が成り立つことをいう．

準同型写像 f が全単射であるとき，f は**同型写像**であるという．群 G から群 G' の上への同型写像があるとき，群 G と G' は同型であるといい，$G \cong G'$ と表す．

演習問題 2.4

群 G から G' への準同型写像 f の**核**

$$\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G \,:\, f(g) = e\}$$

は G の正規部分群であることを示せ．

定理 2.1 (準同型定理)

G, G' を群，$f : G \to G'$ を全射準同型写像とするとき，群の同型

$$G/\mathrm{Ker}\, f \simeq G'$$

が成り立つ．

演習問題 2.5

定理 2.1 を示せ．

2.2 平面の回転

座標平面の原点を中心とする回転全体のなす群は，行列のなす群の一例である．その性質のいくつかは，3 次元以上のユークリッド空間の回転群に拡張される．

例題 2.1

原点を中心として反時計回りに角 θ の回転を行う座標平面 $\mathbb{R}^2$ の変換を r_θ とする．

(1) r_θ は線形変換であることを示せ．

(2) r_θ を表す行列 $R(\theta)$ を求めよ．

(3) $\{r_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ は変換の合成に関して群をなすことを示せ．

(4) $\{R(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ は行列の積に関して上の (3) で考えた群と同型な群をなすことを示せ．

解答 (1) $k \in \mathbb{R}$ に対して，平面上の 3 点 $O, \boldsymbol{a}, k\boldsymbol{a}$ は 1 直線上にあり，$k\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ を k 倍した位置にある．原点を中心とする回転 r_θ により直線は直線に移り，直線上の位置関係（長さの比）は変わらないから，

$$r_\theta(k\boldsymbol{a}) = k\,r_\theta(\boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．r_θ により任意の三角形は合同な三角形に移されるから，

$$r_\theta(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = r_\theta(\boldsymbol{a}) + r_\theta(\boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．したがって r_θ は $\mathbb{R}^2$ の線形変換である．

(2) r_θ により，点 $(1,0), (0,1)$ はそれぞれ $(\cos\theta, \sin\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)$ に写る．したがって，

$$\begin{aligned} r_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= r_\theta\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 定義より $r_{\theta_1+\theta_2} = r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}$，特に単位元は $r_0 = \mathrm{id}$（恒等変換）である．また，$\mathbb{R}$ の加法に関する結合法則より，$\{r_\theta\}$ に対して結合法則が成り立つ．逆元は $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$ で与えられる．したがって r_θ の全体は群をなす．

(4) $r_\theta \leftrightarrow R(\theta)$ は 1 対 1 対応であり，線形変換の合成は行列の積に，恒等変換は単位行列に，逆写像は逆行列に対応しており，群の同型対応を与えている． □

【解説】 (4) と同じように，あるベクトル空間上の線形変換の集合が群をなすとき，その群に含まれる線形変換の（固定された基底に関する）表現行列全体の集合は，もとの線形変換群と同型な群をなす．混乱の恐れがないときは，これらを同一視することにする．

$R(\theta)$ を平面の回転行列，その全体を**平面の回転群**と呼び，記号 $SO(2)$ で表す：

$$SO(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\theta \mapsto R(\theta)$ は $\mathbb{R}$ から $SO(2)$ の上への準同型写像（すなわち $R(\theta_1+\theta_2)=R(\theta_1)R(\theta_2)$ を満たす）であるが，$n \in \mathbb{Z}$ に対して $R(\theta+2n\pi)=R(\theta)$ であるから，$SO(2)$ は加群 $\mathbb{R}$ において差が 2π の整数倍である点を同一視して得られる剰余群と同型である：

$$SO(2) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

なお $R(\theta_1+\theta_2)=R(\theta_1)R(\theta_2)$ は sin および cos の加法定理と同値である．

例題 2.2
$\mathbb{T}=\{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ とおくとき，次を示せ．
(1) $\mathbb{T}$ は乗法に関して $SO(2)$ と同型な群をなす．
(2) $z=x+iy$ により複素平面と xy 座標平面を同一視すると，$e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ に対して，複素平面の変換 $z \mapsto e^{i\theta}z$ は，例題 2.1 の r_θ と一致する．ただし，i は虚数単位 ($i^2=-1$) を表す．

解答 (1) 絶対値が 1 の複素数 z はその偏角を θ とすると，$z=e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ と表すことができる．$\mathbb{T}$ と $SO(2)$ は 1 対 1 に対応し，$e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$, $(e^{i\theta})^{-1}=e^{-i\theta}$ より，群として同型である．
(2) オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より，

$$e^{i\theta}z=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+iy)=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta).$$

□

【解説】 $\mathbb{T} \cong S^1=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ は群をなし，平面の回転群とみなすことができる．

定義 2.5
正の整数 k に対して $\mathbb{T}$ の k 個の直積群

$$\mathbb{T}^k=\{t=(t_1,\ldots,t_k) : t_j \in \mathbb{T} \quad (1 \le j \le k)\}$$

は可換群をなす．($t=(t_1,\ldots,t_k)$, $s=(s_1,\ldots,s_k) \in \mathbb{T}^k$ の積は $ts=(t_1s_1,\ldots,t_ks_k)$ により定義されるから，$\mathbb{T}^k$ が可換群になることは $\mathbb{T}$ が可換群であることから明らかである.）これを **k 次元トーラス**または**階数 k のトーラス**と呼ぶ．$\mathbb{T} \simeq S^1$（円周），$\mathbb{T}^2 \simeq S^1 \times S^1$ はトーラス面と見なすことができる（図 2.1）．$\mathbb{T}^k$ は，すべての対角成分の絶対値が 1 である $k \times k$ 対角行列全体のなす群

$$\left\{ \mathrm{diag}\,(t_1,\ldots,t_k)=\begin{pmatrix} t_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & t_k \end{pmatrix} : t_j \in \mathbb{T} \quad (1 \le i \le k) \right\}$$

と同型である．

上で，$\mathrm{diag}\,(t_1,\ldots,t_k)$ を，対角成分が $t_1,\ldots,t_k$ で，それ以外の成分はすべてゼロの正方行列とした．一般に，$1 \le j \le k$ に対して，n_j 次正方行列 A_j があるとき，$n_1+\cdots+n_k$ 次正方行列 $\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_k)$ を，対角ブロックが順に $A_1,\ldots,A_k$ であり，それ以外の

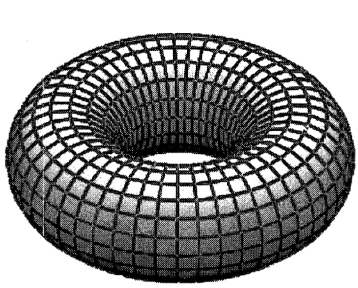


図 2.1　トーラス面.

ブロックはすべてゼロのブロック対角行列とする．スペースを節約するため，本書では記号 diag をしばしば用いる．

定義 2.6

距離，角の大きさを保つ $\mathbb{R}^2$ の変換を**合同変換**と呼ぶ．

$\mathbb{R}^2$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2$ ($\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,y_2)$) により定める．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

を満たす $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f を**直交変換**と呼ぶ．

2×2 実行列 A が ${}^tAA=\mathbf{1}$ を満たすとき，A は**直交行列**であるという．ただし，${}^tA$ は A の転置行列，$\mathbf{1}$ は単位行列を表す．

例題 2.3

2×2 直交行列全体の集合を $O(2)$ で表すとき次の問いに答えよ．

(1) 原点を動かさない $\mathbb{R}^2$ の合同変換は直交変換であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ の線形変換に対して，それが直交変換であることと表現行列が直交行列であることは同値であることを示せ．

(3) $O(2)$ は群であることを示せ．

(4) $A\in O(2)$ に対して $\det A=\pm 1$ を示せ．

(5) $SO(2)$ は $O(2)$ の正規部分群であることを示せ．

(6) $SO(2)$ に含まれない $O(2)$ の元を求めよ．それらはどのような線形変換を表すか？

解答 (1) 合同変換は距離と角の大きさを保つから，例題 2.1 (1) と同様に線形変換であることがわかる．さらに，定義より，直交変換である．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ を列ベクトルで表すとき，内積は行列の積

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

で表されるから，

$$A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}={}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y}$$

である．したがって，A が直交変換の表現行列であることと，

$$ {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \quad ({}^\forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2) $$

は同値である．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ として，${}^t(1,0)$ か ${}^t(0,1)$ のいずれかをとる 4 通りの組み合せを考えることにより，これは ${}^tAA = \mathbf{1}$ と同値であることがわかる．

(3) $O(2)$ は $\mathbb{R}^2$ の直交変換の全体と 1 対 1 に対応し，変換の合成は行列の積に対応している．$\mathbb{R}^2$ の直交変換全体の集合が群をなすことは容易にわかるから，$O(2)$ はこれと同型な群になる．

【別解】直交行列の定義と転置行列の性質を用いて直接示してもよい．$\mathbf{1} \in O(2)$ である．$A, B \in O(2)$ ならば，${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = \mathbf{1}$ より $AB \in O(2)$ である．また，$A \in O(2)$ ならば，${}^tAA = \mathbf{1}$ より $A^{-1} = {}^tA$ だから，${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA = \mathbf{1}$，よって $A^{-1} \in O(2)$ である．したがって $O(2)$ は群である．

(4) ${}^tAA = \mathbf{1}$ より $\det({}^tAA) = 1$ だが，左辺は $\det({}^tAA) = (\det{}^tA)(\det A) = (\det A)^2$ だから，$\det A = \pm 1$ がわかる．

(5) $SO(2)$ が $O(2)$ の部分群であることは行列式の性質からわかる．任意の $A \in SO(2), B \in O(2)$ に対して $\det(BAB^{-1}) = \det A = 1$ より $BAB^{-1} \in SO(2)$ が成り立つ．したがって，$SO(2)$ は $O(2)$ の正規部分群である．($SO(2)$ は準同型写像 $\det : O(2) \to \{\pm 1\}$ の核だから，$O(2)$ の正規部分群であると結論してもよい．)

(6) 向きを保つ直交変換は原点中心の回転で，表現行列の行列式は 1 である．また，向きを逆にする直交変換は原点を通る直線に関する鏡映（対称移動）で，表現行列の行列式は -1 である．このことは幾何学的に示すこともできるが，直接計算により示そう．$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ のように列ベクトルを並べて行列を表すと，

$$ \mathbf{1} = {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}_1|^2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & |\boldsymbol{a}_2|^2 \end{pmatrix}. $$

したがって，$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = 1, \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$，すなわち，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底をなす．$|\boldsymbol{a}_1| = 1$ だから $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくことができる．これと垂直で長さが 1 のベクトルは $\boldsymbol{a}_2 = \pm\,{}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ の 2 通りある．したがって，A は

$$ A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} $$

のいずれかの形をしている．前者は $\det A_1 = 1$ を満たし，例題 2.1 (2) で求めた回転行列である．後者は $\det A_2 = -1$ を満たし，

$$ A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} $$

と表すことができる．これは，x 軸に関する鏡映と原点を中心とする角 θ の回転の合成を表している．A_2 の固有値，固有ベクトルを計算すると，固有値は ± 1，固有値 1 に対する固有ベクトルは ${}^t(\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2})$，固有値 -1 に対する固有ベクトルは ${}^t(\sin\frac{t}{2}, -\cos\frac{t}{2})$ となる．したがって，A_2 は xy 平面内の直線 $x\sin\frac{t}{2} - y\cos\frac{t}{2} = 0$ に関する鏡映の表現行列である． □

演習問題 2.6
整数 n に対して，写像 $L_n(z) = z^n$ は $\mathbb{T}$ からそれ自身への準同型写像であることを示せ．また L_n の核を求めよ．

2.3 直交群

定義 2.7
n を正の整数とする．$\mathbb{R}^n$ 上の内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ を保つ線形変換を**直交変換**と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
&M(n, \mathbb{R}) = \{A \,:\, \text{実数を成分とする } n \times n \text{ 行列}\},\\
&O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \,:\, {}^t\!AA = \mathbf{1}\} \quad (n \times n \text{ 直交行列の全体}),\\
&SO(n) = \{A \in O(n) \,:\, \det A = 1\}
\end{aligned}
$$

とおく．ただし $\mathbf{1}$ は $n \times n$ 単位行列を表す．$O(n)$, $SO(n)$ は行列の積に関して群になる（演習問題 2.7）．$O(n)$ を n 次**直交群**，$SO(n)$ を n 次**特殊直交群**と呼ぶ．

演習問題 2.7
$O(n)$ と $SO(n)$ について次を示せ．
(1) 原点を動かさないような $\mathbb{R}^n$ の合同変換は線形変換である．
(2) $\mathbb{R}^n$ の線形変換に対して，それが直交変換であることと表現行列が直交行列であることとは同値である．
(3) $O(n)$ は群である．
(4) $SO(n)$ は $O(n)$ の正規部分群である．
(5) $A \in O(n)$ に対して $\det A = \pm 1$.
(6) $SO(n)$ に含まれない $O(n)$ の元を $SO(n)$ を用いて表せ．

$SO(n)$ の元は，向きを保つ直交変換であり，行列式が -1 の $O(n)$ の元は向きを保たない（図形を裏返す）直交変換である．

例題 2.4
$O(n)$ の元が実数の固有値を持つならば，それは ± 1 に限ることを示せ．また，n が奇数のとき，$SO(n)$ の任意の元は固有値 1 を持つことを示せ．

解答 $A \in O(n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を固有値 λ に対する A の固有ベクトルとする．つまり，$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\,(\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ とする．両辺のノルムをとると $|A\boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}|$ だが，$A \in O(n)$ より $|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$，よって，$|\lambda| = 1$，したがって $\lambda = \pm 1$ である．
$A \in SO(n)$ のとき，

$$
\det(A - \mathbf{1}) = \det(A(\mathbf{1} - {}^t\!A)) = \det A \det(\mathbf{1} - A) = \det(\mathbf{1} - A) = (-1)^n \det(A - \mathbf{1}).
$$

したがって，n が奇数ならば $\det(A - \mathbf{1}) = 0$，すなわち 1 は A の固有値である． □

演習問題 2.8
$O(n)$ から $SO(n+1)$ への単射準同型写像を具体的に作れ.

定義 2.8
$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の不定値対称双線形形式 $\langle\, ,\, \rangle$ を

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1} \quad (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1})$$

により定義する.(双線形とは, $\boldsymbol{v} \mapsto \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$, $\boldsymbol{w} \mapsto \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ がともに線形写像であることを指し, 対称とは, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$ であることを指す. また, 不定値とは, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ が定符号でないことを指す.)

$$O(n,1) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) : \langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \ ({}^\forall \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1})\}$$

とおく. $O(n,1)$ を符号 $(n,1)$ を持つ**不定値直交群**という. $O(3,1)$ は**ローレンツ群**と呼ばれる. $I_{n,1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1) \in GL(n+1, \mathbb{R})$ とおくと, $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = {}^t\boldsymbol{v} I_{n,1} \boldsymbol{w}$ であり,

$$O(n,1) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) : {}^t g I_{n,1} g = I_{n,1}\}$$

と表すこともできる. $SO(n,1) = O(n,1) \cap SL(n+1, \mathbb{R})$ とおく.
　一般に, 符号 (p,q) を持つ不定値直交群 $O(p,q)$, $SO(p,q)$ も上と同様に定義される.

演習問題 2.9
$O(n,1)$, $SO(n,1)$ は群であることを示せ. また, $g \in O(n,1)$ に対して, $\det g = \pm 1$ であることを示せ.

2.4 ユニタリ群

定義 2.9
n を正の整数とする. $\mathbb{C}^n$ 上の**エルミート内積**

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$$

を保つ線形変換を**ユニタリ変換**と呼ぶ.

$$M(n, \mathbb{C}) = \{A : \text{複素数を成分とする } n \times n \text{ 行列}\},$$
$$U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) : A^* A = \mathbf{1}\} \quad (n \times n \text{ ユニタリ行列の全体}),$$
$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

とおく. ここで $A^* = {}^t\bar{A}$ とおいた. A^* を A の**随伴行列**という. $U(n)$, $SU(n)$ は行列の積に関して群になる（例題 2.5）. $U(n)$ を n 次**ユニタリ群**, $SU(n)$ を n 次**特殊ユニタリ群**と呼ぶ.

例題 2.5
$U(n)$ について次を示せ.

(1) $\mathbb{C}^n$ の線形変換に対して，それがエルミート内積を保つことと表現行列がユニタリ行列であることは同値である．
(2) $U(n)$ は群である．
(3) $SU(n)$ は $U(n)$ の正規部分群である．
(4) 任意の $A \in U(n)$ に対して $|\det A| = 1$ である．
(5) 任意の $z \in U(1) = \mathbb{T}$ に対して，$\det A = z$ となる $A \in U(n)$ が存在する．

解答 (1)–(3) は例題 2.3 と同様．
(4) $A^*A = \mathbf{1}$ より

$$1 = \det(A^*A) = \det({}^t\bar{A})\det(A) = \overline{\det A}\det A = |\det A|^2,$$

したがって $|\det A| = 1$.
(5) $z \in \mathbb{T}$ に対して $z = e^{i\theta}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を 1 つとって，$A = \mathrm{diag}\,(e^{\frac{i\theta}{n}}, \ldots, e^{\frac{i\theta}{n}})$ とおくと，$A \in U(n)$ かつ $\det A = z$ である． □

【解説】 $SU(n)$ は上への準同型写像 $\det : U(n) \to \mathbb{T}$ の核である．

例題 2.6
$U(2)$ および $SU(2)$ は次のように表すことができることを示せ．

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\zeta\bar{\beta} & \zeta\bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta,\, \zeta \in \mathbb{C},\, |\zeta| = 1,\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\},$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

解答 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in U(2)$, $\det A = \zeta$ とおく．例題 2.5 (4) より $|\zeta| = 1$ である．$A^{-1} = A^*$ より

$$\frac{1}{\zeta}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix},$$

したがって，$\delta = \zeta\bar{\alpha}$, $\gamma = -\zeta\bar{\beta}$, $\det A = \zeta(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \zeta$ より $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ となる．逆にこれらを満たせば $A \in U(2)$ である．
【別解】「$A \in U(2) \Leftrightarrow A \in M(2, \mathbb{C})$ の行ベクトルはエルミート内積に関する正規直交基底をなす」を用いてもよい．A の 1 行目の単位ベクトル (α, β) と直交し，行列式の値が ζ になるような 2 行目は $(-\zeta\bar{\beta}, \zeta\bar{\alpha})$ の形をしていることは容易にわかる． □

演習問題 2.10
次を示せ．
(1) $O(n)$ は $U(n)$ の部分群である．
(2) $SO(n)$ は $SU(n)$ の部分群である．

定義 2.10
$\mathbb{C}^{n+1}$ 上の不定値エルミート形式 $\langle\,,\,\rangle$ を

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = v_1\bar{w}_1 + \cdots + v_n\bar{w}_n - v_{n+1}\bar{w}_{n+1} \quad (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1})$$

により定義するとき，

$$U(n,1) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{C}) : \langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle \ ({}^{\forall}\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^{n+1})\}$$

により定義する．$U(n,1)$ を符号 $(n,1)$ を持つ**不定値ユニタリ群**という．$I_{n,1} = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1) \in GL(n+1,\mathbb{R})$ とおくと，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = {}^t\boldsymbol{v} I_{n,1}\bar{\boldsymbol{w}}$ であり，

$$U(n,1) = \{g \in GL(n+1,\mathbb{C}) : g^* I_{n,1} g = I_{n,1}\}$$

と表すこともできる．$SU(n,1) = U(n,1) \cap SL(n+1,\mathbb{C})$ とおく．

一般に，符号 (p,q) を持つ不定値ユニタリ群 $U(p,q)$, $SU(p,q)$ も上と同様に定義される．

演習問題 2.11
$U(n,1)$, $SU(n,1)$ は群であることを示せ．また，$g \in U(n,1)$ に対して，$|\det g| = 1$ であることを示せ．

演習問題 2.12
$SU(1,1)$ は次のように表すことができることを示せ．

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

演習問題 2.13
$U(n)$ から $SU(n,1)$ への単射準同型写像を具体的に作れ．

2.5 シンプレクティック群

定義 2.11
行列 $J_n \in M(2n,\mathbb{R})$ を

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

により定め，$\mathbb{C}^{2n}$ 上の双線形形式 ω を

$$\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x} J_n \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} (x_j y_{n+j} - x_{n+j} y_j) \qquad (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{2n})$$

により定義する．ω を $\mathbb{C}^{2n}$ 上の**シンプレクティック形式**と呼ぶ．ω を保つ $\mathbb{C}^{2n}$ のユニタリ変換全体の集合を $Sp(n)$ とおく：

$$Sp(n) = \{A \in U(2n) : {}^tA J_n A = J_n\}.$$

$Sp(n)$ は行列の積に関して群になる（例題 2.8 (2)）．$Sp(n)$ を n 次**シンプレクティック群**または**斜交群**と呼ぶ.

例題 2.7

ω は次の (i)–(iv) を満たすことを示せ.

(i) ω は双線形である．すなわち $\boldsymbol{x} \mapsto \omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y} \mapsto \omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ はいずれも $\mathbb{C}^{2n}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像である.

(ii) ω は反対称である．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{2n}$ に対して $\omega(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = -\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(iii) ω は非退化である．すわなち任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{2n}$ に対して $\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ ならば，$\boldsymbol{x} = 0$.

(iv) $\mathbb{C}^{2n}$ の部分空間 W_1, W_2 で，$W_j = W_j^{\perp} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{2n} : \omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \quad {}^{\forall}\boldsymbol{y} \in W_j\}$ $(j = 1, 2)$ を満たすものがあって，$\mathbb{C}^{2n}$ はそれらの直和 $\mathbb{C}^{2n} = W_1 \oplus W_2$ に分解される.

解答 ω が (i), (ii) を満たすことは定義から容易にわかる．(iii) については，$\boldsymbol{y}$ として $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$ をとれば，$\omega(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) = 0$ より $\boldsymbol{x} = 0$ が従う.

(iv) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ で生成される $\mathbb{C}^{2n}$ の部分空間を W_1，$\boldsymbol{e}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}$ で生成される $\mathbb{C}^{2n}$ の部分空間を W_2 とすれば条件を満たす. □

【補足】 逆に $2n$ 次元複素ベクトル空間 V 上の双線形形式 ω に対して，$\mathbb{C}^{2n}$ を V に代えて例題 2.7 の条件 (ii), (iii) が成り立つならば，(iv) を満たす V の部分空間 W_1, W_2 が存在し，V の基底を適当に選ぶことにより ω は上で与えた J_n で決まる座標表示を持つことが示される（[32, 第 10 章] 参照）．ω を V 上の**シンプレクティック形式**と呼ぶ.

例題 2.8

次を示せ.

(1) $A \in Sp(n)$ に対して $\det A = \pm 1$.

(2) $A \in Sp(n)$ の逆行列は $A^{-1} = -J_n {}^t\!A J_n$ と表される.

(3) $Sp(n)$ は $U(2n)$ の部分群である.

(4) $Sp(1) = SU(2)$.

解答 (1) $J_n^2 = -\mathbf{1}_{2n}$, $\det J_n = 1$ に注意する．${}^t\!A J_n A = J_n$ の両辺の行列式をとると $(\det A)^2 = 1$ がわかる.

(2) 定義よりただちに従う.

(3) A, $B \in Sp(n)$ ならば,

$$ {}^t(AB) J_n (AB) = {}^t\!B\, {}^t\!A J_n A B = {}^t\!B J_n B = J_n $$

より $AB \in Sp(n)$ である．また $A \in Sp(n)$ ならば，(2) より

$$ {}^t(A^{-1}) J_n A^{-1} = {}^t(-J_n {}^t\!A J_n) J_n A^{-1} = -J_n A J_n^2 A^{-1} = J_n $$

だから $A^{-1} \in Sp(n)$ である．したがって $Sp(n)$ は $U(2n)$ の部分群である.

(4) 例題 2.6 で示した $A \in U(2)$ の一般形を用いて ${}^t\!A J_1 A = J_1$ となるための必要十分条件を調べると，$\zeta = 1$，すなわち $A \in SU(2)$ であることがわかる. □

【補足】 (3) で $A \in Sp(n)$ に対して $\det A = \pm 1$ を示したが，(4) で $n = 2$ のときに示した通り，一般に任意の正の整数 n と任意の $A \in Sp(n)$ に対して $\det A = 1$ が成り立つ．これは $Sp(n)$ の連結性（命題 10.9）と $\det : Sp(n) \to \{\pm 1\}$ の連続性より従う．Sp の "S" は "special"（行列式が 1）を表すものではなく，symplectic の頭文字だが，$Sp(n)$ の複素行列としての実現は特殊ユニタリ群 $SU(2n)$ の部分群になっている．2.7 節では，四元数を用いたシンプレクティック群の実現について取り扱う．

2.6 一般線形群とその閉部分群

定義 2.12

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M(n, \mathbb{K}) : \det A \neq 0\},$$

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M(n, \mathbb{K}) : \det A = 1\}$$

とおく．$GL(n, \mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ 上の**一般線形群**，$SL(n, \mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ 上の**特殊線形群**と呼ぶ．

例題 2.9

$GL(n, \mathbb{K})$ は行列の積に関して群であり，$SL(n, \mathbb{K})$ はその部分群であることを示せ．

解答 $\det x \neq 0$ は x^{-1} が存在するための必要十分条件である．$GL(n, \mathbb{K})$ は積，逆行列をとる操作で閉じており，単位行列 $\mathbf{1}$ を単位元とし，積について結合法則を満たしている．したがって $GL(n, \mathbb{K})$ は群である．$\det(AB) = \det A \det B$ より，$SL(n, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群である． □

【解説】 $GL(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^n$ の上へ $\mathbb{K}$-線形同型写像の全体と同一視される．このとき，積，逆元はそれぞれ写像の合成，逆写像に対応している．

演習問題 2.14

$n \geq 2$ に対して，$xy \neq yx$ となる $x, y \in GL(n, \mathbb{K})$ が存在し，$GL(n, \mathbb{K})$ は可換でないことを示せ．

ここで本書でもっとも重要な対象を定義する．

定義 2.13

G が**閉線形群**であるとは，ある n に対して G が $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群であり，$GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分集合である，すなわち G 内の点列 $A_1, A_2, \ldots$ が $A \in GL(n, \mathbb{C})$ に収束するならば $A \in G$ が成り立つことをいう．($GL(n, \mathbb{C}) \subset M(n, \mathbb{C})$ の点列の収束は行列の各成分が収束することにより定める（定義 3.4，例題 3.6 参照）．)

まとめて言えば，**閉線形群**とは $GL(n, \mathbb{C})$ の**閉部分群**のことである．閉線形群は**線形リー群**または**行列群**と呼ばれることもある*1)．

*1) 同じ用語でも文献により定義が異なる場合もあるので注意を要する．[37], [28] 等では,「閉線形群」のことを「線型リー群」と呼んでいる．一方で，[36] 等では，一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群であって,「リー群」になるものを「線形リー群」と呼んでいる．後に見るように「閉線形群」は「リー群」

2つの閉線形群 G_1 と G_2 が**同型**であるとは，全単射 $f : G_1 \to G_2$ が存在して，f は群としての同型写像かつ同相写像になっていることをいう．(f が同相写像とは，f は全単射で，f, f^{-1} がともに連続であることをいう.) 群としての同型，位相空間としての同相の一方に限定して考えるときには，そのように明記する．位相空間については第6章で扱う．第6章および第7章で詳述するように，閉線形群には自然に C^∞ 級の微分構造が入り，同型な閉線形群は同相（位相同型）であるだけでなく C^∞ 級微分同相になる．

これまでに本書で登場した行列の群はすべて閉線形群である．

例題 2.10
次の群は閉線形群であることを示せ．

$GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$.

解答 $GL(n,\mathbb{C})$ 自身が条件を満たすことは明らか．$GL(n,\mathbb{R})$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群であり，$A_j \in GL(n,\mathbb{R})$ が $GL(n,\mathbb{C})$ の元 A に収束すればその成分は実数だから $A \in GL(n,\mathbb{R})$ である．したがって $GL(n,\mathbb{R})$ は閉線形群である．
det は行列の成分の多項式だから $GL(n,\mathbb{K})$ 上の連続関数である．したがって，$A_j \in SL(n,\mathbb{K})$ が $A \in GL(n,\mathbb{C})$ に収束しているならば，$\det A = \lim_{j\to\infty} \det A_j = 1$，つまり $SL(n,\mathbb{K}) \subset GL(n,\mathbb{C})$ は閉部分集合である．したがって $SL(n,\mathbb{K})$ は閉線形群である．
直交群 $O(n)$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群であり，${}^tAA = \mathbf{1}$ を満たす実行列の全体として特徴づけられる．${}^tAA$ の成分は A の成分の多項式だから $GL(n,\mathbb{C})$ 上の連続関数であり，$SL(n,\mathbb{K})$ の場合と同様に多項式方程式系で特徴づけられる $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群は閉集合になる．
$SO(n)$, $U(n)$, $SU(n) \subset GL(n,\mathbb{C})$, $Sp(n) \subset GL(2n,\mathbb{C})$ が閉部分群であることも同様に示される． □

演習問題 2.15
$O(n,1)$, $SO(n,1)$, $U(n,1)$, $SU(n,1)$ は閉線形群であることを示せ．

例題 2.11
G, H を閉線形群とするとき，直積群 $G \times H$ は閉線形群とみなせることを示せ．

解答 $G \subset GL(n,\mathbb{K})$, $H \in GL(m,\mathbb{K})$ を閉線形群とすると，$n+m$ 次正方行列

$$\mathrm{diag}(g,h) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \quad (g \in G,\ h \in H)$$

の全体は直積群 $G \times H$ に同型な $GL(n+m,\mathbb{K})$ の閉部分群である． □

例題 2.12

$T = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\} \simeq \mathbb{T}^n$

になるが，行列のリー群は閉とは限らない（典型例は例題 6.3）．本書では「閉」を仮定している点を明示するため「閉線形群」を用いることにする．

とする．T' が T を含む $U(n)$ の可換部分群ならば，$T'=T$ であることを示せ．

解答 $g \in T'$ とする．$\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1) \in T$ と可換であることから，g の 1 行目，1 列目の成分は g_{11} を除いてすべてゼロであることがわかる．同様にして，対角成分の 1 つが -1 でその他は 1 である対角行列のすべてと可換であることから，g は対角行列であることがわかる．$U(n)$ に含まれる対角行列は T の元である． □

【解説】 $\mathbb{T}^n$ については定義 2.5 を参照．閉線形群 G のトーラス部分群の中で極大なものを G の**極大トーラス**と呼ぶ．例題 2.12 は $T \simeq \mathbb{T}^n$ が $U(n)$ の極大トーラスであることを示している．極大トーラスについては第 10 章で詳しく取り扱う．

例題 2.13
$SO(4)$ は $\mathbb{T}^2$ と同型な部分群を含むことを示せ．元の形を具体的に書け．

解答 例題 2.2 より $\mathbb{T} \simeq SO(2)$, 直積群 $\mathbb{T}^2 \simeq SO(2) \times SO(2)$ は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\theta, \phi \in \mathbb{R})$$

全体のなす $SO(4)$ の部分群とみなすことができる． □

定義 2.14
$O(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$ を

$$O(n,\mathbb{C}) = \{A \in M(n,\mathbb{C}) \,:\, {}^tAA = \mathbf{1}\},$$
$$SO(n,\mathbb{C}) = \{A \in O(n,\mathbb{C}) \,:\, \det A = 1\}$$

により定める．$O(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$ は閉線形群である．$O(n,\mathbb{C})$ を**複素直交群**，$SO(n,\mathbb{C})$ を**複素特殊直交群**と呼ぶ．

演習問題 2.16
次を示せ．
(1) $A \in O(n,\mathbb{C})$ に対して $\det A = \pm 1$.
(2) $O(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{C})$ は閉線形群である．

定義 2.15
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対して，

$$Sp(n,\mathbb{K}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{K}) \,:\, {}^tAJ_nA = J_n\}$$

とする（J_n は定義 2.11 で定義した行列）．$Sp(n,\mathbb{K})$ は閉線形群である（演習問題 2.17）．$Sp(n,\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ 上の**シンプレクティック群**と呼ぶ．

$$Sp(n) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n), \quad Sp(n,\mathbb{R}) = Sp(n,\mathbb{C}) \cap GL(2n,\mathbb{R})$$

である．

演習問題 2.17

$Sp(n, \mathbb{K})$ は閉線形群であることを示せ.

演習問題 2.18

$Sp(1, \mathbb{K}) = SL(2, \mathbb{K})$ を示せ.

同型 $\mathbb{T} \simeq SO(2)$（第 1 章, 2.2 節）と同様に，複素行列の群は実行列の群と見なせることを演習問題 2.19, 2.20 で見る.

演習問題 2.19

a, b を実数として $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の形の行列全体の集合は $\mathbb{C}$ と同型な体をなす（つまり，和と積について複素数と「まったく同じ」になっている）ことを示せ.

演習問題 2.20

n を正の整数とする. $A + iB \in M(n, \mathbb{C})$ $(A, B \in M(n, \mathbb{R}))$ に対して $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in M(2n, \mathbb{R})$ を対応させる写像を ρ_n とするとき次の (1)–(6) を示せ. また (7) に答えよ.

(1) $\rho_n(\lambda A) = \lambda \rho_n(A) \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ A \in M(n, \mathbb{C}))$.

(2) $\rho_n(A + B) = \rho_n(A) + \rho_n(B) \quad (A,\ B \in M(n, \mathbb{C}))$.

(3) $\operatorname{Im} \rho_n = \{A \in M(2n, \mathbb{R}) : AJ_n = J_n A\}$.

(4) $\rho_n(AB) = \rho_n(A)\rho_n(B) \quad (A,\ B \in M(n, \mathbb{C}))$.

(5) $\rho_n(GL(n, \mathbb{C}))$ は $GL(n, \mathbb{C})$ と同型な $GL(2n, \mathbb{R})$ の部分群である.

(6) $\rho_n(U(n))$ は $U(n)$ と同型な $O(2n)$ の部分群である. また, $Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n) \simeq U(n)$ が成り立つ.

(7) 次の図式が可換になるような $\mathbb{R}$-線形写像 $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ を求めよ. ただし縦の矢印 L_A は行列 A の左からのかけ算で表される線形変換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \\ {\scriptstyle L_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\rho_n(A)}} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

（この図式が可換とは, $L_{\rho_n(A)} \circ f_n = f_n \circ L_A$ が成り立つことをいう.）

演習問題 2.20 (6) において, $\rho_n(U(n)) \subset O(2n)$ は, $n = 1$ の場合の $\rho_1(U(1)) = SO(2)$ の一般化である. 実は $\rho_n(U(n)) \subset SO(2n)$ であるが, $n \geq 2$ のときは $\rho_n(U(n)) \neq SO(2n)$ である.

演習問題 2.21

(1) 1 次関数 $L_{a,b}(x) = ax + b$ $(a > 0,\ b \in \mathbb{R})$ の全体は関数の合成に関して群をなすことを示せ. またこの群は可換でないことを示せ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a > 0,\ b \in \mathbb{R})$ 全体の集合は閉線形群であることを示せ.

(3) 上の (1), (2) の 2 つの群は同型であることを示せ.

上の群を**直線のアファイン変換群**と呼ぶ.

演習問題 2.22
次の形をした行列全体の集合は閉線形群であることを示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{ は実数}).$$

また, A^{-1} を求めよ.

演習問題 2.23
対角成分がすべて 1 である上三角行列全体の集合

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{K}) \right\}$$

は閉線形群であることを示せ.

例題 2.14
任意の $g \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して, $g = kp$ となる $k \in SO(2)$ と $\det p = 1$ を満たす正定値実対称行列 p が一意的に存在することを示せ.

解答 ${}^t gg$ は対称行列で正定値である. 実際, ゼロでない任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\langle \boldsymbol{v}, {}^t gg\boldsymbol{v} \rangle = \langle g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{v} \rangle > 0$ が成り立つ. 対称行列は直交行列により対角化できるから, $r^{-1}\, {}^t ggr = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ となる $r \in O(2)$ が存在する. ${}^t gg$ は正定値だから $\lambda, \mu > 0$ である. $p = r\, \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda}, \sqrt{\mu})\, r^{-1}$ とおくと, p は $p^2 = {}^t gg$ を満たす正定値対称行列である. $p^2 = {}^t gg$ を満たす正定値対称行列 p の固有空間は ${}^t gg$ の固有空間と一致するから, そのような p は一意である.
$k = gp^{-1}$ とおくと, $k\, {}^t k = gp^{-1}\, {}^t p^{-1}\, {}^t g = g(p^2)^{-1}\, {}^t g = g({}^t gg)^{-1}\, {}^t g = gg^{-1}\, {}^t g^{-1}\, {}^t g = \mathbf{1}$, したがって, $k \in O(2)$ である. p は正定値だから $\det p > 0$, したがって, $\det k = \det (gp^{-1}) = \det p^{-1} > 0$, よって, $\det k = 1$, $\det p = 1$ がわかる. 作り方から k も一意に定まる. □

演習問題 2.24
任意の $g \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して, $g = kp$ となる $k \in SU(2)$ と $\det p = 1$ を満たす正定値エルミート行列 p が一意的に存在することを示せ.

例題 2.14, 演習問題 2.24 の分解を, それぞれ $SL(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{C})$ の**極分解**という.

2.7 四元数とシンプレクティック群

$\mathbb{H}$ を $1, i, j, k$ を基底とする 4 次元の実ベクトル空間とする. (i, j, k は単なる記号だが, 下で積の規則を与える.) つまり, $\mathbb{H}$ の元 a は

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\ \text{は実数})$$

の形で表される．ここで i, j, k の積の規則を

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

により定める．実数と i, j, k の積は交換可能とし，$\mathbb{H}$ の任意の 2 元の積は分配法則が成り立つように定める．たとえば，

$$(1+j)(2j+3k) = 2j + 3k + 2j^2 + 3jk = 2j + 3k - 2 + 3i = -2 + 3i + 2j + 3k$$

である．このように $\mathbb{R}^4$ に加法と乗法が定義した $\mathbb{H}$ をハミルトンの**四元数体**，$\mathbb{H}$ の元を**四元数**（**クォータニオン**）と呼ぶ．$\mathbb{H}$ は**斜体**になる．すなわち $\mathbb{H}$ は次の条件 (i)–(iii) を満たす.（さらに乗法の可換性を仮定したものが体の公理に当たる．$\mathbb{H}$ の乗法は可換でないが，習慣に従い四元数「体」と呼ぶ.）

(i) $\mathbb{H}$ は加法について可換群をなす.

(ii) $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ は乗法について群をなす.

(iii) $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{H})$.

$\mathbb{R}^n$ にうまく積の規則が定義できて斜体になるのは $n = 1,\ 2,\ 4$ の場合に限り，積の規則は本質的に一意的であることが知られている．すなわち $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ 以外にそういうものはない．これはフロベニウスが 1877 年に発表した結果である（[3] を参照のこと）.

四元数をスカラー部分（実部）とベクトル部分（虚部）に分けて考えると便利なので少し記号を変える．四元数 a を

$$a = s + U, \quad U = u_1 i + u_2 j + u_3 k \quad (s,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \text{は実数})$$

と書き，s を a のスカラー部分（実部），U を a のベクトル部分（虚部）という．a の**共役** $\bar{a}$ を

$$\bar{a} = s - U = s - u_1 i - u_2 j - u_3 k,$$

a の**絶対値**（長さ）$|a|$ を

$$|a| = \sqrt{\bar{a}a} = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{s^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

により定める．スカラー部分がゼロ，すなわち $\bar{a} = -a$ を満たす四元数を**純四元数**という．また，$|a| = 1$ を満たす四元数を**単位四元数**という．1, i, j, k は単位四元数である.

2 つの純四元数 $U = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ と $V = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ の積を i, j, k どうしの積の規則と分配法則を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} UV = &-(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &+ (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,i + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,k \end{aligned}$$

となる．3 次ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を考えると，UV のスカラー部分の -1 倍は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ になり，UV のベクトル部分の i, j, k の係数は $\boldsymbol{u}$ と

$\boldsymbol{v}$ のベクトル積（外積）$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ の成分になっていることがわかる．したがって，3 次ベクトルと純四元数を同一視すると，上の式は

$$UV = -U \cdot V + U \times V$$

と表すことができる．四元数 $a = s + U, b = t + V$ の積は，

$$ab = (s + U)(t + V) = st + sV + tU + UV$$

となる．

四元数の絶対値，共役の性質を挙げる．

命題 2.2 (四元数の性質)

(i) ゼロでない四元数 a に対して $\dfrac{a}{|a|}$ は単位四元数である．

(ii) 四元数 a に対して $a^{-1} = \dfrac{\bar{a}}{|a|^2}$，特に単位四元数 a に対して $a^{-1} = \bar{a}$.

(iii) 純四元数 a が $|a| = 1$ を満たすのは $a^2 = -1$ であるとき，そしてそのときに限る．

(iv) $\bar{\bar{a}} = a$.

(v) $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$.

(vi) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

(vii) $|ab| = |a||b|$.

演習問題 2.25

上に挙げた四元数の性質を示せ．また $\mathbb{H}$ は斜体であることを確かめよ．

$\mathbb{R}^2$ に積を定義して複素数体 $\mathbb{C}$ を得たのと同様に，$\mathbb{R}^4$ に積を定義して，和・積が「うまくいく」ような四元数体 $\mathbb{H}$ を見出したのは，19 世紀の数学者ハミルトンである．四元数は，実数，複素数とともに数学やその応用分野で重要である．i, j, k の係数がゼロである四元数 a は実数と同一視され，j, k の係数がゼロである四元数 $a + bi$ は複素数と同一視される．こうして，実数，複素数，四元数の間には包含関係

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

が成り立つ．

$\mathbb{H}$ が非可換である点に気をつければ，$\mathbb{H}$ を成分とする行列，$\mathbb{H}$ 上のベクトル空間とその上の線形変換などを $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ 上の場合と同様に考えることができる．

n を正の整数とし，$\mathbb{H}^n$ を $\mathbb{H}$ を成分とする n 次縦ベクトル全体の集合とする．縦ベクトルのスカラー倍を $a \in \mathbb{H}$ の右からのかけ算

$$\boldsymbol{x} \ \mapsto \ \boldsymbol{x}a = \begin{pmatrix} x_1 a \\ \vdots \\ x_n a \end{pmatrix}$$

により定める．これにより $\mathbb{H}^n$ は $\mathbb{H}$ 上のベクトル空間になる．四元数を成分とする $n \times n$ 行列全体の集合を $M(n, \mathbb{H})$ とする．行列のスカラー倍を $\mathbb{H}$ の元の右からのかけ算により定めることにより，$M(n, \mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ 上のベクトル空間になる．($\mathbb{H}$ は非可換なので，ス

カラー倍を左右で区別する必要があることに注意.）$M(n,\mathbb{H})$ の可逆な元全体の集合を $GL(n,\mathbb{H})$ と書く．つまり，

$$GL(n,\mathbb{H}) = \{A \in M(n,\mathbb{H}) : AB = BA = \mathbf{1}_n \text{ を満たす } B \in M(n,\mathbb{H}) \text{ が存在する }\}.$$

$GL(n,\mathbb{H})$ を $\mathbb{H}$ 上の**一般線形群**と呼ぶ.

> **例題 2.15**
> 次を示せ.
> (1) $A \in M(n,\mathbb{H})$ に対して，$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{H}^n)$ は $\mathbb{H}^n$ の線形変換を定める．対応 $A \mapsto L_A$ により $M(n,\mathbb{H})$ と $\mathbb{H}^n$ 上の線形変換の全体は同一視される.
> (2) $GL(n,\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$-線形同型写像 $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ 全体の集合と同一視される.
> (3) $\mathbb{H}$ は非可換なので $M(n,\mathbb{H})$ の元の行列式の定義は明らかでない．次の $M(2,\mathbb{H})$ の元は可逆でない．$M(2,\mathbb{C})$ の場合を真似てこれらの行列の行列式を計算するとどうなるか？
> $$\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & i \\ j & j \end{pmatrix}.$$

解答 (1) $a, b \in \mathbb{H}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{H}^n$ に対して,

$$A\left(\boldsymbol{x}a + \boldsymbol{y}b\right) = (A\boldsymbol{x})a + (A\boldsymbol{y})b$$

より $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{H}$-線形変換である.
逆に $\mathbb{H}$-線形写像 $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ に対して，標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,\ldots,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = {}^t(0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = {}^t(0,\ldots,0,1)$$

の f による像をこの順に並べてできる行列を A とすると，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である.
(2) $BA = \mathbf{1}$ とすると,

$$L_B\left(L_A(\boldsymbol{x})\right) = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

だから，L_B は L_A の逆写像である．同様に $L_A(L_B(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ だから L_A は全射である.
逆に $L_A : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ が $\mathbb{H}$ 線形同型写像であるとすると，容易にわかるように L_A^{-1} は線形写像である．$L_A^{-1} = L_B$ となる $B \in M(n,\mathbb{H})$ をとると，$L_A \circ L_B = L_B \circ L_A = \mathrm{id}$ より $AB = BA = \mathbf{1}$ が従う.
(3) いずれの行列 A も列が 1 次従属だから L_A は単射でない．実際,

$$\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & i \\ j & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\det A = ad - bc$ とすると,

$$\det\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = ij - ji = 2k, \qquad \det\begin{pmatrix} i & i \\ j & j \end{pmatrix} = ij - ij = 0,$$

$\det A = ad - cb$ とすると，前者がゼロ，後者が $2k$ になり，「A が可逆 $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$」はうまくいかない． □

定義 2.16
$\mathbb{H}^n$ 上の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

により定義する．また $\boldsymbol{x} \in \mathbb{H}^n$ のノルムを $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ により定義する．任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{H}^n$ に対して $(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を満たす $g \in GL(n, \mathbb{H})$ 全体の集合を $Sp(n)$ と書き，**シンプレクティック群**と呼ぶ．(群になることは直交群の場合と同様に示される．)
$X \in M(n, \mathbb{H})$ に対して，$X^* = {}^t\bar{X}$ とおく（$\bar{X}$ は X の各成分について $\mathbb{H}$ の元としての共役をとった行列）．$O(n)$, $U(n)$ の場合と同様に

$$Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) : gg^* = \mathbf{1}\}$$

である．(2.5 節では $Sp(n)$ を $U(2n)$ の部分群として定義した．2 つの実現の対応は例題 2.18 で明らかにする．)

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 上でそれぞれ不定値直交群 $O(n,1)$，不定値ユニタリ群 $U(n,1)$ を定義したのと同様に $\mathbb{H}$ 上で**不定値シンプレクティック群** $Sp(n,1)$，さらに一般に $Sp(p,q)$ が定義される．

$M(n, \mathbb{H})$ の部分集合は以下で見るように $M(2n, \mathbb{C})$ の部分集合と見なされる．四元数は

$$q = a + bi + cj + dk = a + bi + j(c - di) = \alpha + j\beta \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

のように書くことができるから，$\mathbb{H}$ は $1, j$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と見なすことができる．

例題 2.16
α, $\beta \in \mathbb{C}$ とする．$\alpha j = j\bar{\alpha}$ を示せ．また，線形写像 $x \mapsto (\alpha + j\beta)x$ $(x \in \mathbb{H})$ の基底 $1, j$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ であることを示せ．

解答 $\alpha = a + bi\,(a,\, b \in \mathbb{C})$ とおくと，$\alpha j = (a + bi)j = aj + bk = j(a - bi) = j\bar{\alpha}$.

$$(\alpha + j\beta)1 = \alpha + j\beta, \quad (\alpha + j\beta)j = -\bar{\beta} + j\bar{\alpha}$$

より基底 $1, j$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ である． □

全単射 $g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$ を

$$g_n({}^t(\alpha_1 + j\beta_1, \ldots, \alpha_n + j\beta_n)) = {}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

により定義する．任意の $A \in M(n, \mathbb{H})$ に対して下の図式が可換になるように単射

$$\eta_n : M(n,\mathbb{H}) \to M(2n,\mathbb{C})$$

を定めたい.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \\ {\scriptstyle L_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\eta_n(A)}} \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \end{array}$$

$n=1$ のときは, $\eta_1(\alpha+\beta j) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ とすればよい. ($j\beta = \bar{\beta} j$ より例題 2.16 の行列において $\bar{\beta}$ を β に置き換えた.)

例題 2.17
次を示せ.
(1) $\mathbb{H}^n$ の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, j\boldsymbol{e}_1, \ldots, j\boldsymbol{e}_n$ に関する $A+Bj \in M(n,\mathbb{H})$ (A, $B \in M(n,\mathbb{C})$) の表現行列は

$$\eta_n(A+Bj) = \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$$

である.
(2) $X, Y \in M(n,\mathbb{H})$ に対して $\eta_n(XY) = \eta_n(X)\eta_n(Y)$.
(3) η_n の像は定義 2.11 で定義した J_n を用いて, 次で与えられる.

$$\eta_n(M(n,\mathbb{H})) = \{X \in M(2n,\mathbb{C}) : \bar{X}J_n = J_n X\}.$$

解答 (1) $\eta_n(A+Bj)$ が与式で与えられることは η_1 の場合と同様に示される.
(2) $\mathbb{H}$-線形変換の合成の表現行列は表現行列の積になるのは明らか. (1) の η_n の表示式を用いても容易に示される.
(3) $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$ が $\bar{X}J_n = J_n X$ を満たすための必要十分条件は $C = \bar{B}$, $D = \bar{A}$ である. したがって, η_n の像は $\bar{X}J_n = J_n X$ により特徴づけられる. □

演習問題 2.26
上の全単射 $g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$ により, $\mathbb{C}^{2n}$ 上のエルミート内積と $\mathbb{H}^n$ 上の内積 (定義 2.16) が対応していることを確かめよ.

例題 2.18
次を示せ.

$$\eta_n(GL(n,\mathbb{H})) = \{g \in GL(2n,\mathbb{C}) : \bar{g}J_n = J_n g\},$$
$$\eta_n(Sp(n)) = U(2n) \cap \eta_n(GL(n,\mathbb{H})) = \{g \in U(2n) : {}^t g J_n g = J_n\}.$$

解答 最初の主張は例題 2.17 より従う. $A+Bj \in GL(n,\mathbb{H})$ に対して,

$$(A+Bj)(A+Bj)^* = (A+Bj)(A^* - jB^*) = AA^* + BB^* + (B\,{}^tA - A\,{}^tB)j$$

である．したがって，$A+Bj \in GL(n,\mathbb{H})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
A+Bj \in Sp(n) &\iff (A+Bj)(A+Bj)^* = \mathbf{1}, \\
&\iff AA^* + BB^* = \mathbf{1},\ B\,{}^tA - A\,{}^tB = 0, \\
&\iff \eta_n(A+Bj) \in U(2n).
\end{aligned}
$$

したがって 2 番目の主張が従う． □

【解説】 混乱の恐れがないときは，本問で求めた $Sp(n) \subset M(n,\mathbb{H})$ の複素行列としての実現 $\eta_n(Sp(n))$ も $Sp(n)$ と書く（定義 2.11 参照）．

> **例題 2.19**
> $\eta_1(Sp(1)) = SU(2)$ を示せ．

解答 定義より $Sp(1) = \{\alpha + \beta j \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$,

$$
\eta_1(Sp(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,:\, \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}
$$

である．例題 2.6 より $\eta_1(Sp(1)) = SU(2)$. □

【解説】 $Sp(1) \subset \mathbb{H}$ は絶対値が 1 の四元数全体のなす群に他ならない．つまり，

$$
Sp(1) = \{a + bi + cj + dk \,:\, a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \simeq S^3
$$

である．$Sp(1) \simeq SU(2)$ と $SO(3)$ の関連については，第 5 章で扱う．

演習問題 2.27
$x \in M(1,\mathbb{H})$ に対して $\det(\eta_1(x)) \in \mathbb{R}$ を示せ．（一般に $x \in M(n,\mathbb{H})$ に対して $\det(\eta_n(x)) \in \mathbb{R}$ が成り立つことが知られている．）

演習問題 2.28
$SL(n,\mathbb{H}) = \{x \in GL(n,\mathbb{H}) \,:\, \det(\eta_n(x)) = 1\}$ とおく．$SL(n,\mathbb{H})$ は閉線形群であることを示せ．また $SL(1,\mathbb{H}) = Sp(1)$ を示せ．

2.8 閉線形群の等質空間

n を 2 以上の整数とする．$\mathbb{R}^n$ 内の**単位球面**は

$$
S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}
$$

により与えられる．n 次直交群 $O(n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積を不変にするから，$g \in O(n)$, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ に対して $g\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ である．

定義 2.17
群 G と集合 M に対して，写像

$$
G \times M \to M, \qquad (g, m) \mapsto gx
$$

が定義されて，2 条件

(i) $g(hm) = (gh)m \quad (g, h \in G, m \in M)$,

(ii) $em = m \quad$ (e は G の単位元, $m \in M$)

を満たすとき，G は M に左から**作用する**という.（右からの作用も同様に定義されるが，本書では左からの作用しか考えないので,「左から」はしばしば省略する.）

さらに，任意の $m_0, m_1 \in M$ に対して，$gm_0 = m_1$ となる $g \in G$ が存在するとき，G の M への作用は**推移的**であるという．言い換えると，G が M に推移的に作用するとき，$m_0 \in M$ により $M = Gm_0 = \{gm_0 : g \in G\}$ となる.

$g \in G$ の作用が M の恒等変換を定めるのは $g = e$ の場合に限るとき，G の M への作用は**忠実**であるという.

G が M に推移的に作用するとする．$m_0 \in M$ に対して,

$$G_{m_0} = \{g \in G : gm_0 = m_0\}$$

を G における m_0 の**等方部分群**と呼ぶ．このとき，G における G_{m_0} の右剰余類全体の集合と M の間の 1 対 1 対応

$$G/G_{m_0} \simeq M$$

が成り立つ．群 G が推移的に作用する集合 M を G の**等質空間**と呼ぶ.

演習問題 2.29

群 G が M に推移的に作用するとき，次の問いに答えよ.

(1) G_{m_0} は G の部分群であることを示せ.

(2) 1 対 1 対応 $G/G_{m_0} \simeq M$ を示せ.

例題 2.20

S^{n-1} について次を示せ.

(1) $O(n)$ は S^{n-1} に推移的に作用する.

(2) $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$ における $O(n)$ の等方部分群は $O(n-1)$ に同型である.

解答 (1) $g \in O(n)$, $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ に対して，行列の積 $g\boldsymbol{x}$ を対応させると，$g\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ であり，行列の積の性質より，作用になる．任意の $\boldsymbol{x}_1 \in S^{n-1}$ に対して，$g\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_1$ となる $g \in O(n)$ が存在することを示せばよい．$\boldsymbol{x}_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ をとり，$g = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ とすれば，$g \in O(n)$, $g\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_1$ を満たす.

(2) $\boldsymbol{e}_1$ における $O(n)$ の等方部分群は,

$$G_{\boldsymbol{e}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in O(n-1) \right\} \simeq O(n-1)$$

である．実際，$g\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$ より，g の第 1 列は $\boldsymbol{e}_1$ である．また，g の各列は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底をなすから，g の第 1 行は ${}^t\boldsymbol{e}_1$ である．したがって，$g = \mathrm{diag}(1, x)$ $(x \in GL(n-1, \mathbb{R}))$ の形をしているが，$g \in O(n)$ より $x \in O(n-1)$ である. □

【**解説**】 例題 2.20 より,

$$S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1)$$

が成り立つ.

演習問題 2.30
$S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1)$ を示せ.

演習問題 2.31
$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ より,

$$\{\boldsymbol{z} = {}^t(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\} \simeq S^{2n-1}$$

である. 1 対 1 対応

$$U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1},$$
$$SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}$$

を示せ.

演習問題 2.32
$\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$ より,

$$\{\boldsymbol{q} = {}^t(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{H}^n \,:\, |q_1|^2 + \cdots + |q_n|^2 = 1\} \simeq S^{4n-1}$$

である. 1 対 1 対応

$$Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}$$

を示せ.

演習問題 2.33
群 G が集合 M に作用しているとする. $m, m' \in M$ に対して, $Gm = Gm'$ または $Gm \cap Gm' = \emptyset$ のいずれかが成り立つことを示せ.

Gm を m の G-**軌道**という. 群 G が集合 M に作用しているとき, 演習問題 2.33 により, M は G-軌道の直和として表される. これを M の G-**軌道分解**と呼ぶ.

例題 2.21
$g \in SL(2, \mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})\right)$$

と定義する. 複素上半平面を H とおく.

$$H = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

このとき次を示せ.
(1) $SL(2, \mathbb{R})$ は H に作用する.
(2) 任意の $z \in H$ に対して $g \cdot i = z$ となる $g \in SL(2, \mathbb{R})$ が存在する.
(3) i における G の等方部分群は $SO(2)$ である.

【解説】 $SL(2,\mathbb{R})$ は上半平面に推移的に作用し,

$$H \simeq SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$$

であることがわかる.

解答 (1) $g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ $(i = 1,\, 2)$ とおく.

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot z) = g_1 \cdot \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1}$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)\, z + a_1 b_2 + b_1 d_1}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)\, z + c_1 b_2 + d_1 d_2} = (g_1\, g_2) \cdot z.$$

また,

$$g \cdot z = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac\,|z|^2 + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

より

$$\operatorname{Im} g \cdot z = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},$$

したがって, $z \in H$ ならば $g \cdot z \in H$.

(2) $z = x + iy \in H$ に対して, $g = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ とおくと, $g \cdot i = z$ となる.

(3) $g \cdot i = i \Leftrightarrow ac + bd = 0,\, c^2 + d^2 = 1$. $ad - bc = 1$ よりこれは $g \in SO(2)$ と同値であることがわかる(例題 2.3 (6) 参照). □

演習問題 2.34

(1) 共役 $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$ $\left(g_0 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) \right)$ により, $SL(2,\mathbb{R})$ は

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

と同型であることを示せ.

(2) 変換 $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ は上半平面 H から単位円板

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

の上への全単射であることを示せ. また

$$D \simeq SU(1,1)/S(U(1) \times U(1))$$

となることを示せ. ただし

$$S(U(1) \times U(1)) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right\}$$

である.

2.9 鏡映

ゼロでないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$H_{\boldsymbol{v}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 0\}$$

とおくと, $H_{\boldsymbol{v}}$ は原点を通る超平面である. $H_{\boldsymbol{v}}$ 上の任意の点（ベクトル）を固定し, $\boldsymbol{v}$ を $-\boldsymbol{v}$ に写す $\mathbb{R}^n$ の線形変換 $r_{\boldsymbol{v}}$ を $H_{\boldsymbol{v}}$ に関する**鏡映**という.

例 2.2
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,\ldots,0)$ とすると, $H_{\boldsymbol{e}_1} = \{{}^t(0,x_2,\ldots,x_n) : x_j \in \mathbb{R}\ (2 \leq j \leq n)\}$ であり, $H_{\boldsymbol{e}_1}$ に関する鏡映は行列 $\mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$ による線形変換である.

演習問題 2.35
鏡映は直交変換であることを示せ.

演習問題 2.36
$H_{\boldsymbol{v}}$ に関する鏡映は

$$r_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})}{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}\boldsymbol{v}$$

により与えられることを示せ.

直交変換は鏡映により生成される. これは, **カルタン・デュドネの定理**と呼ばれる結果の特別な場合である.

定理 2.3
$\mathbb{R}^n$ の直交変換は, 原点を通る超平面に関する鏡映の高々 n 個の合成で表される.

[証明] n に関する帰納法により示す. $n=1$ のとき, 原点を固定する直交変換は, 恒等変換 $x \mapsto x$ と鏡映変換 $x \mapsto -x$ のいずれかである. したがって主張は成立する.

主張が $n-1$ のとき成立すると仮定する. f を恒等変換ではない直交変換とする. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{v}$ であるような $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ を選ぶ. このとき, 原点を通る超平面 H が存在して, H に関する鏡映により $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ に写される. 実際, $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v}|$ に注意すると, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ とすれば, $r_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$ となることがわかる. したがって, $r_{\boldsymbol{u}} \circ f(\boldsymbol{v}) = r_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$, すなわち $\boldsymbol{v}$ は $r_{\boldsymbol{u}} \circ f$ の固有値 1 を持つ固有ベクトルである.

$\mathbb{R}\boldsymbol{v}$ の直交補空間 $\boldsymbol{v}^{\perp}$ 上への $r_{\boldsymbol{u}} \circ f$ の制限は $\boldsymbol{v}^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ 上の直交変換だから, 帰納法の仮定より, 高々 $n-1$ 個の鏡映の積で表される. これらの鏡映は $\boldsymbol{v}$ に自明に働くとして, $\mathbb{R}^n$ の鏡映と見なすことができるから, $r_{\boldsymbol{u}} \circ f$ は高々 $n-1$ 個の鏡映の積で表される. 左から $r_{\boldsymbol{u}}$ を施すと, $r_{\boldsymbol{u}}^2 = \mathrm{id}$ より, f が高々 n 個の鏡映の積で表されることがわかる. □

演習問題 2.37
$\mathbb{R}^n$ の直交変換 f が k 個の鏡映の合成で表されるとき, f を表す $O(n)$ の元の行列式の値は, $(-1)^k$ であることを示せ.

3 次元空間の回転群 $SO(3)$ と $SU(2)$, $Sp(1)$ の関連については, 第 5 章で扱う.

第 3 章
行列の指数関数

行列の指数関数は，閉線形群を調べる上で非常に重要な役割を果たす．

この章を通して $\mathbb{K}$ で $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表し，n を正の整数とする．成分が $\mathbb{K}$ に属する $n \times n$ 行列全体の集合を $M(n, \mathbb{K})$ で表す[*1)]．

3.1 微分方程式と行列の指数関数

例題 3.1

t を時刻，$\boldsymbol{x}(t)$ を時刻 t における $\mathbb{R}^n$ 内の動点，$\boldsymbol{x}_0$ を定点とする（$\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトルで表す）．$A \in M(n, \mathbb{R})$ とし，$\boldsymbol{x}(t)$ が次の微分方程式と初期条件を満たすものとする．

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

この初期値問題のベキ級数解（$\boldsymbol{x}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j \boldsymbol{b}_j$ の形の解）を求めよ．

注意 3.1

$n = 2$ のとき，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

として上の初期値問題を成分で書けば，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

*1) $M(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{C})$ だから，より広い複素数でやっておけばよいようなものだが，実数の範囲に限定して考えることもあるので，このように取り扱う．$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ のどちらでも通用する話をするときは記号 $\mathbb{K}$ を使うことにする．四元数体 $\mathbb{H}$ に成分を持つ正方行列に対しても行列の指数関数を定義することができるが，本書では扱わない．

となる．

解答 $\boldsymbol{x} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \boldsymbol{b}_j$ を $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}$ に代入すると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} j t^{j-1} \boldsymbol{b}_j = \sum_{j=0}^{\infty} t^j A \boldsymbol{b}_j,$$

したがって，

$$\boldsymbol{b}_{j+1} = \frac{1}{j+1} A \boldsymbol{b}_j$$

が得られる．この漸化式を解くと

$$\boldsymbol{b}_j = \frac{1}{j!} A^j \boldsymbol{b}_0$$

だが，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ より $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{x}_0$ である．したがって，求める解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \boldsymbol{x}_0$$

である．（$A^0 = \mathbf{1}$（単位行列）と約束した．） □

【解説】 例題 3.1 の級数解は，以下で定義する行列の指数関数を用いて，$\boldsymbol{x}(t) = \exp tA \cdot \boldsymbol{x}_0$ と表すことができる．例題 3.8 より，級数解は収束して，微分方程式の解の存在と一意性より，これが例題 3.1 の初期値問題の唯一の解を与える．

定義 3.1

$X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して $\exp X$ を

$$\exp X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \mathbf{1} + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

により定義する．写像 $\exp : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K}),\ X \mapsto \exp X$ を**行列の指数関数**または**指数写像**と呼ぶ．$\exp X$ を $\exp(X)$ または e^X とも書く．行列の指数関数が収束することは，例題 3.8 で示す．指数写像の像は $GL(n, \mathbb{K})$ に含まれる，すなわち $\exp X$ は正則行列である（例題 3.10 (2)）．

X が 1×1 行列，つまり実数（または複素数）のとき，上で与えた $\exp X$ の定義式はネイピアの数 e を底とする指数関数のマクローリン展開にほかならない．

例題 1.1 (3) で

$$\exp t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

を示した．さらに行列の指数関数の簡単な例を計算しておこう．

例題 3.2

次の X について $\exp tX$ を求めよ．

(1) $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$　　(2) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答 (1) $X^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ だから,

$$\begin{aligned}\exp tX &= \mathbf{1} + t\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2} + \frac{\mu^3 t^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $X^2 = O$ だから $\exp tX = \mathbf{1} + tX = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(3) 例題 1.1 (3) と同様にして, $\exp tX = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ となることがわかる. □

【解説】 例題 3.2 (1) と同様に, 任意の自然数 n について, $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のとき, $\exp tX = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$ となる.

3.2 行列の無限級数の収束

$\mathbb{K}$ の元を成分とする $n \times n$ 行列の空間 $M(n, \mathbb{K})$ は, 行列の加減乗除が定義された線形代数学の舞台であるとともに, 前節でその一端を見たように微分方程式や無限級数が現れる解析学の舞台でもある. この節では, $M(n, \mathbb{K})$ 上で解析学を行うための準備をしておく.

例題 3.3
$M(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であることを示し, 基底と次元を求めよ. また $M(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であることを示し, 基底と次元を求めよ.

解答 $1 \leq j, k \leq n$ に対して, $E_{jk} \in M(n, \mathbb{K})$ を (j, k) 成分が 1 でそれ以外がゼロである行列とする. $\{E_{jk} : 1 \leq j, k \leq n\}$ は $M(n, \mathbb{K})$ の 1 組の基底であり, $M(n, \mathbb{K})$ の次元は n^2 である. また $M(n, \mathbb{C})$ は $\{E_{jk}, iE_{jk} : 1 \leq j, k \leq n\}$ を基底とする $\mathbb{R}$ 上の $2n^2$ 次元ベクトル空間である. □

【解説】 $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, つまり $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき $d = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき $d = 2$ とするとき, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として, $M(n, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{R}^{dn^2}$ である.

定義 3.2
$X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ に対して $(X, Y) = \sum_{i,j} X_{ij} \bar{Y}_{ij}$ により $M(n, \mathbb{K})$ 上の内積を定義する.

また $X \in M(n, \mathbb{K})$ のノルムを

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)} = \sqrt{\sum_{i,j} |X_{ij}|^2}$$

により定義する．このノルムは例題 3.3 の同型 $M(n, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{R}^{dn^2}$ の下で，$\mathbb{R}^{dn^2}$ 上の通常のユークリッド・ノルムに他ならない．

定義 3.3
$X \in M(n, \mathbb{K})$ のトレース $\mathrm{Tr}\, X$ を X の対角成分の和 $\mathrm{Tr}\, X = X_{11} + \cdots + X_{nn}$ により定める．

例題 3.4
$(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(XY^*)$ を示せ．($Y^* = {}^t\bar{Y}$ は Y の随伴行列を表す．)

解答 定義よりただちに確認することができる． □

例題 3.5
$\|\ \|$ は次のノルムの公理 (i)–(iii) を満たすことを示せ．

(i) 任意の $X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して $\|X\| \geq 0$，等号成立は $X = 0$ のときに限る．
(ii) $\|aX\| = |a|\|X\|$ $(a \in \mathbb{K},\ X \in M(n, \mathbb{K}))$,
(iii) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ $(X,\ Y \in M(n, \mathbb{K}))$

また,

(iv) $\|XY\| \leq \|X\|\,\|Y\|$ $(X,\ Y \in M(n, \mathbb{K}))$

を満たすことを示せ．

解答 (i)–(iii) は $M(n, \mathbb{K}) \simeq \mathbb{R}^{dn^2}$ 上のノルム（ベクトルの長さ）に関する標準的な事項なので，解答は線形代数の教科書（たとえば [31]）に譲る．
(iv) シュワルツの不等式より,

$$\begin{aligned}\|XY\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{kj} \right|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} |X_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |Y_{kj}|^2 \right) \right\} \\ &= \left(\sum_{i,k=1}^{n} |X_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j,k=1}^{n} |Y_{kj}|^2 \right) = \|X\|^2 \|Y\|^2.\end{aligned}$$

□

定義 3.4
$M(n, \mathbb{K})$ 内の点列 $X_1, X_2, \ldots$ が X に収束するとは，行列 X_n の成分それぞれがなす数列が対応する X の成分に収束することと定める．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X$$

と書く．

例題 3.6

$\lim_{n\to\infty} X_n = X$ と $\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\| = 0$ は同値であることを示せ.

解答 ノルムは定義より成分の連続関数だから，各成分が収束すればノルムの意味で収束する．また各 (i,j) 成分について $|X_{ij}| \le \|X\|$ だから，ノルムの意味で収束すれば，各成分の数列が収束している． □

例題 3.7

$R > 0$ とする．$z \in \mathbb{C}$ のベキ級数

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

が任意の $|z| < R$ に対して収束するならば，行列 $X \in M(n, \mathbb{K})$ のベキ級数

$$f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j$$

は $\|X\| < R$ で収束し，$f(X)$ の各成分は X の各成分の解析関数になることを示せ.

解答 部分和を $f_k(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$ とすると，例題 3.5 より，正の整数 $l < k$ に対して，

$$\|f_k(X) - f_l(X)\| = \left\| \sum_{j=l}^{k} a_j X^j \right\| \le \sum_{j=l}^{k} |a_j| \, \|X\|^j$$

が成り立つ．したがって，仮定より $f_k(X)$ はノルム $\| \ \|$ についてコーシー列であるから収束する．$f_k(X)$ の各成分は，X の成分の多項式だから，その広義一様極限である $f(X)$ の各成分は $M(n, \mathbb{K})$ 上の解析関数である． □

例題 3.8

任意の $X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して行列の指数関数

$$\exp X = \mathbf{1} + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

は収束し，指数写像 $\exp : M(n, \mathbb{K}) \to M(n, \mathbb{K})$ は解析的であることを示せ．また

$$\|\exp X\| \le e^{\|X\|}$$

を示せ.

解答 指数関数のマクローリン展開の収束半径は無限大であることと例題 3.7 から従う．また，

$$\|\exp X\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|X\|^j}{j!} = e^{\|X\|} < +\infty$$

である． □

3.3 指数写像の性質

$X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ に対して $[X,Y] = XY - YX$ とおき，X と Y の**カッコ積**と呼ぶ．n 次正方行列とスカラーの大きな違いは，$n \geq 2$ のとき，$X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ に対して $[X,Y] = 0$，すなわち $XY = YX$ が常に成り立つとは限らない点にあり，これが本書で展開する理論や例においてもっとも重要なポイントである．

例題 3.9
次の問いに答えよ．
(1) $[X,Y] \neq 0$ となる $X, Y \in M(2,\mathbb{R})$ の例を挙げよ．
(2) $X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ に対して，$(X+Y)^3$ の展開式を書け．

解答 (1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) $(X+Y)^3 = X^3 + X^2Y + XYX + YX^2 + XY^2 + YXY + Y^2X + Y^3.$ □

例題 3.10
$X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ とするとき，次が成り立つことを示せ．
(1) $[X,Y] = 0$ ならば，$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$.
(2) $\exp X$ は正則行列であり，$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.
(3) $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ に対して，$\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X)$.
(4) 整数 n に対して，$(\exp X)^n = \exp nX$.
(5) $\exp X^* = (\exp X)^*$.

【解説】 例題 3.9 で見たように行列の積は一般に非可換だが，可換な行列に対しては，通常の指数関数の場合と同様の性質が，行列の指数関数に対しても成立する．(1), (3) は可換な元の組に対して指数法則が成り立つことを示している．一般には例題 3.21, 定理 7.2 のように複雑な形になる．

解答 (1) $XY = YX$ だから，

$$(\exp X)(\exp Y) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{k!}\right) = \sum_{j,\,k=0}^{\infty} \frac{X^j Y^k}{j!k!}.$$

ここで非負整数 m に対して $j + k = m$，つまり $k = m - j$ である項の和は

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{X^j Y^{m-j}}{j!(m-j)!} = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j Y^{m-j} = \frac{(X+Y)^m}{m!}$$

となる．ここで，2 項定理

$$(X+Y)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} X^j Y^{m-j} \qquad \left(\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \text{ は 2 項係数}\right)$$

を用いた．級数が絶対収束していることから，和の順序を交換して $j+k=m$ となる項の和を先にとっても等しいので，

$$(\exp X)(\exp Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^m}{m!} = \exp(X+Y)$$

となり，題意が示された．

(2) X と $-X$ は可換だから，(1) より $\exp X \exp(-X) = \exp(X-X) = \exp 0 = \mathbf{1}$. したがって， $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ である．

(3) t_1X と t_2X は可換だから，(1) より従う．

(4) 上の (1), (2) より従う．

(5) $(X^*)^n = (X^*)^n$ を用いて項別に $*$ をとる． □

演習問題 3.1

X が実交代行列ならば $\exp X$ は直交行列であることを示せ．

演習問題 3.2

$\exp(X+Y) \neq \exp X \exp Y$ であるような $X, Y \in M(2, \mathbb{R})$ の例を挙げよ．

例題 3.11

$X \in M(n, \mathbb{K})$ を定数を成分とする行列とする．曲線 $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ に対する微分方程式の初期値問題

$$A'(t) = A(t)X, \quad A(0) = \mathbf{1}$$

はただ 1 つの解 $A(t) = \exp tX$ を持つことを示せ．

解答 例題 3.8 より $\exp tX$ は解である．一意性は微分方程式の一般論から従う． □

演習問題 3.3

例題 3.11 の一意性を微分方程式の解の一意性定理を用いずに示せ．

演習問題 3.4

次を示せ（O はランダウの大きい O 記号）．

$$\exp tX = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j X^j}{j!} + O(t^{k+1}).$$

定義 3.5

例題 3.10 (3) より，$X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して，曲線 $A(t) = \exp tX$ は，加法群 $\mathbb{R}$ から $GL(n, \mathbb{K})$ への微分可能な準同型写像 $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ を与える．

一般に G を閉線形群とするとき，連続な準同型写像 $A : \mathbb{R} \to G$ を**ワン・パラメーター群**または G の**ワン・パラメーター部分群**と呼ぶ．（A の像 $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ は G の部分群になっている．）

任意のワン・パラメーター群 $A(t)$ に対して，$X \in M(n, \mathbb{K})$ が一意的に存在して $A(t) = \exp tX$ が成り立つ（例題 3.12 と例題 3.20）．

例題 3.12

任意の微分可能な準同型写像 $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ は，$A(t) = \exp tA'(0)$ と表されることを示せ.

解答 $A(0) = A(0+0) = A(0)A(0) \in GL(n, \mathbb{K})$ より $A(0) = \mathbf{1}$ である．また，

$$A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A(t)(A(h) - A(0))}{h} = A(t)A'(0).$$

例題 3.11 より $A(t) = \exp tA'(0)$ である. □

【解説】 準同型写像 $A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ の連続性だけを仮定して，$A(t) = \exp tX$ を満たす $X \in M(n, \mathbb{K})$ が一意的に存在することを示すことができる（例題 3.20）.

演習問題 3.5

G が可換な閉線形群，A, B が G のワン・パラメーター部分群であるとき，AB も G のワン・パラメーター部分群であることを示せ.

例題 3.13

(1) 正則行列 P に対して $\exp(P^{-1}XP) = P^{-1}(\exp X)P$ が成り立つことを示せ.

(2) X が正則行列 P により $P^{-1}XP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と対角化できるとき，

$$\exp X = P\operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 上の (2) を用いて $\exp t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ.

解答 (1) 任意の自然数 j に対して $(P^{-1}XP)^k = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP)\cdots(P^{-1}XP) = P^{-1}X^kP$ が成り立つこと，$P^{-1}(X+Y)P = P^{-1}XP + P^{-1}YP$，および行列の指数関数の定義より従う.

(2) 対角成分が $(1,1)$ 成分から (n,n) 成分まで順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ で与えられる対角行列 $Y = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ に対して，$Y^j = \operatorname{diag}(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j)$ だから行列の指数関数の定義より $\exp Y = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ が成り立つ．(1) より結論が従う.

(3) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は ± 1，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ である．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}XP = \operatorname{diag}(1, -1)$．したがって，

$$\exp X = P\operatorname{diag}(e^t, e^{-t})P^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

□

例題 3.14

次を示せ.

(1) 任意の正則行列 P に対して $\operatorname{Tr}(P^{-1}XP) = \operatorname{Tr} X$.

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を $X \in M(n, \mathbb{K})$ の重複度をこめた固有値とするとき，$\exp X$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ である．

(3) $\det(\exp X) = e^{\mathrm{Tr}\, X}$．ただし，$\det(\exp X)$ は $\exp X$ の行列式を表す．

【解説】 この問題からも $\exp X$ は正則行列であることがわかる．

解答 (1) トレースの定義より $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ が成り立つ．したがって，

$$\mathrm{Tr}\,(P^{-1}XP) = \mathrm{Tr}\,(XPP^{-1}) = \mathrm{Tr}\, X.$$

(2) X が対角化可能なときは例題 3.13 (2) より従う．一般に，$Y = P^{-1}XP$ が $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分とする上三角行列（$i > j$ ならば $Y_{ij} = 0$ となる行列）になるような正則行列 P が存在する．Y^k の対角成分は $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ だから，$\exp Y$ の対角成分は $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ となる．したがって，$X = PYP^{-1}$ の固有値は $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$ である．
(3) 正則行列 P に対して，例題 3.13 (1) より

$$\det(\exp(P^{-1}XP)) = \det(P^{-1}(\exp X)P) = \det(\exp X)$$

である．また (1) より $e^{\mathrm{Tr}\,(P^{-1}XP)} = e^{\mathrm{Tr}\, X}$ が成り立つから，適当な $Y = P^{-1}XP$ に対して示せばよい．(2) のように Y を上三角行列にとれば，$\det(\exp X) = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}\,(P^{-1}XP)} = e^{\mathrm{Tr}\, X}$ が示される． □

例題 3.15
$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+$ を

$$\mathfrak{p} = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : {}^tX = X,\ \mathrm{Tr}\, X = 0\},$$
$$\mathfrak{p}_+ = \{X \in \mathfrak{p} : X \text{ は正定値},\ \det X = 1\}$$

と定める．指数写像は $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_+$ の上への全単射であることを示せ．

解答 対称行列は直交行列により対角化できる．X が正定値になるのは X の固有値がすべて正であるときだから，例題 3.13，例題 3.14 より主張が従う． □

演習問題 3.6
$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+$ を

$$\mathfrak{p} = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^* = X,\ \mathrm{Tr}\, X = 0\},$$
$$\mathfrak{p}_+ = \{X \in \mathfrak{p} : X \text{ は正定値},\ \det X = 1\}$$

と定める．指数写像は $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_+$ の上への全単射であることを示せ．

例題 3.16
$X \in M(2, \mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\, X = 0$ のとき，

$$\exp X = (\cos\sqrt{\det X})\mathbf{1} + \frac{\sin\sqrt{\det X}}{\sqrt{\det X}} X$$

であることを示せ．

解答 ケイリー・ハミルトンの定理より，$X^2-(\operatorname{Tr}X)X+(\det X)\mathbf{1}=0$．$\operatorname{Tr}X=0$ より，$X^2=-(\det X)\mathbf{1}$．

$$\exp X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\det X)^k\mathbf{1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\det X)^kX$$

より主張が従う．($\sqrt{\det X}$ は実数とは限らない．) □

例題 3.17
例題 3.16 を用いて，$n=2$ のとき，例題 3.15 の写像の逆写像を具体的に求めよ．

解答 $X\in\mathfrak{p}$ は $X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形をしている．$\det X=-a^2-b^2<0$ に注意すると，例題 3.16 より，

$$\exp X=(\cosh\sqrt{a^2+b^2})\mathbf{1}+\frac{\sinh\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}X$$

である．$x=\exp X$ とおくと，$\operatorname{Tr}x=2\cosh\sqrt{a^2+b^2}$，したがって，

$$\sqrt{a^2+b^2}=\cosh^{-1}\frac{\operatorname{Tr}x}{2}$$

である．(x が正定値であることから，$\operatorname{Tr}x\geq 2$ であり，cosh の逆関数により $\sqrt{a^2+b^2}$ の値が正の実数値として定まる．)

$$X=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sinh\sqrt{a^2+b^2}}(x-(\cosh\sqrt{a^2+b^2})\mathbf{1})$$

に $\sqrt{a^2+b^2}=\cosh^{-1}\frac{\operatorname{Tr}x}{2}$ を代入したものが逆写像を与える． □

演習問題 3.7
例題 3.16 を用いて，$n=2$ のとき，演習問題 3.6 の写像の逆写像を具体的に求めよ．

3.4 行列の対数関数

定義 3.6
$A\in M(n,\mathbb{K})$ に対して，行列の対数関数を

$$\log A=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(A-\mathbf{1})^j=(A-\mathbf{1})-\frac{(A-\mathbf{1})^2}{2}+\frac{(A-\mathbf{1})^3}{3}-\cdots$$

により定義する．

例題 3.18
$\log A$ は $\|A-\mathbf{1}\|<1$ に対して収束し，$M(n,\mathbb{K})$ における $\mathbf{1}$ の近傍から 0 の近傍へ

の解析的写像を与えることを示せ．また

$$\log(\exp X) = X \quad (\|X\| < \log 2),$$
$$\exp(\log A) = A \quad (\|A - \mathbf{1}\| < 1)$$

が成り立つことを示せ．

【解説】 exp は 0 の近傍と $\mathbf{1}$ の近傍の間の解析的微分同相であり，逆写像は log で与えられる．解析的ならば無限回微分可能だから，exp と log は 0 の近傍と $\mathbf{1}$ の近傍の間の C^∞ 級微分同相を与えている．

解答 複素数 z のベキ級数

$$\log(z+1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j$$

は $|z| < 1$ に対して収束するから，例題 3.7 より $\log A$ は $\|A - \mathbf{1}\| < 1$ に対して収束する．多項式列の広義一様極限だから，$A \mapsto \log A$ は解析的である．
$\|X\| < \log 2$ ならば，

$$\|\exp X - \mathbf{1}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|X\|^j}{j!} = e^{\|X\|} - 1 < 1$$

より $\log(\exp X)$ が定義される．
定義より

$$\log(\exp X) = \log\left(\mathbf{1} + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots\right)$$
$$= \left(X + \frac{X^2}{2!} + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(X + \frac{X^2}{2!} + \cdots\right)^2 + \frac{1}{3}\left(X + \frac{X^2}{2!} + \cdots\right)^3 - \cdots$$

であるが，右辺の級数は行列のノルムの意味で絶対収束しているから，順序を入れ替えて X のベキについて整理すると，

$$\log(\exp X) = X + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X^3 + \cdots = X$$

となる．実際に X^j $(j \geq 2)$ の係数がすべてゼロであることは，それらの係数が X を複素数 z で置き換えた $\log e^z$ における z^j の係数と同一であり，$\log e^z = z$ $(|z| < \log 2)$ よりそれらの係数はゼロであることからわかる．
$\exp(\log A) = A$ についても，$e^{\log z} = z$ $(|z-1| < 1)$ が絶対収束するベキ級数の関係式であることから従う． □

例題 3.19
$A, B \in M(n, \mathbb{K})$ が $\mathbf{1}$ の近くにあり $[\log A, \log B] = 0$ ならば，$\log(AB) = \log A + \log B$ が成り立つことを示せ．

解答 A, B が $\mathbf{1}$ に十分近く，$\log A, \log B, \log(AB)$ が定義されるとき，例題 3.18 と例題 3.10 (1) より

$$\exp(\log(AB)) = AB = \exp(\log A)\exp(\log B) = \exp(\log A + \log B)$$

が成り立つ．両辺の対数をとると $\log(AB) = \log A + \log B$ が従う． □

演習問題 3.8

A が $\mathbf{1}$ の近くにある直交行列ならば，$\log A$ は交代行列であることを示せ．

演習問題 3.9

行列の指数関数に対して次の主張は成り立つか．

(1) $e^X e^Y = e^Y e^X$ ならば $XY = YX$．

(2) $e^X e^Y = e^Y e^X$ ならば $e^{X+Y} = e^X e^Y$．

例題 3.20

$A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{K})$ が連続な準同型写像ならば，$A(t) = \exp tX$ となる $X \in M(n, \mathbb{K})$ が一意的に存在することを示せ．

【解説】 本問は $\mathbb{R}$ から $GL(n, \mathbb{K})$ への連続な準同型写像はワン・パラメーター群に限ることを示している（例題 3.12 も参照）．

解答 $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon = \{X \in M(n, \mathbb{K}) : \|X\| < \varepsilon\}$ とおく．$0 < \varepsilon < \log 2$ を満たす ε をとり，$U = \exp(B_{\frac{\varepsilon}{2}})$ とおくと，U は $GL(n, \mathbb{K})$ における $\mathbf{1}$ の近傍である．$\exp : B_{\frac{\varepsilon}{2}} \to U$ は 1 対 1 写像で，逆写像は log で与えられる．$A(t)$ は $A(0) = \mathbf{1}$ を満たす $GL(n, \mathbb{K})$ 内の連続曲線だから，ある $t_0 > 0$ が存在して，$|t| < t_0$ を満たす任意の t に対して $A(t) \in U$ が成り立つ．$X = \frac{1}{t_0}\log A(t_0)$ とおくと，$A(t_0) = \exp t_0 X$ である．A は準同型写像だから $A\left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = A(t_0) = \exp t_0 X$ である．実は $A\left(\frac{t_0}{2}\right) = \exp \frac{t_0}{2} X$ が成り立つ．実際，$A\left(\frac{t_0}{2}\right) = \exp Y \in U$ とすると，$A\left(\frac{t_0}{2}\right)^2 = \exp 2Y = \exp t_0 X$ であり，U 上 log は単射だから $2Y = t_0 X$，したがって $Y = \frac{t_0}{2} X$ がわかる．

この議論を繰り返して，任意の非負整数 j に対して $A\left(\frac{t_0}{2^j}\right) = \exp \frac{t_0}{2^j} X$ が成り立つことがわかる．また，A は準同型写像だから

$$A\left(\frac{kt_0}{2^j}\right) = A\left(\frac{t_0}{2^j}\right)^k = \left(\exp \frac{t_0}{2^j} X\right)^k = \exp \frac{kt_0}{2^j} X$$

が任意の $k \in \mathbb{Z}$ と任意の非負整数 j に対して成り立つ．

$$\left\{\frac{k}{2^j} : j, k \in \mathbb{Z}, j \geq 0\right\}$$

は $\mathbb{R}$ の稠密部分集合だから $A(st_0) = \exp(st_0 X)$ が任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．$st_0 = t$ とおくと，$A(t) = \exp tX$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことがわかる． □

演習問題 3.10

$GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ のワン・パラメーター部分群は複素平面内のどのような曲線か？

例題 3.21（キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式）

$X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ が $\|X\| + \|Y\| < \log 2$ を満たすとき，$\exp Z = (\exp X)(\exp Y)$ と

なる $Z \in M(n, \mathbb{K})$ がただ 1 つ存在し，X, Y のベキ級数で表されることを示せ．また 3 次の項までの展開は

$$\log((\exp X)(\exp Y)) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \cdots$$

で与えられることを示せ．

【解説】 $Z = \log(e^X e^Y)$ の級数展開を**キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式**と呼ぶ．（キャンベル・ハウスドルフの公式，ハウスドルフの公式ともいう．）実は $\log(e^X e^Y)$ の 4 次以降の一般の展開項もカッコ積を用いて表すことができる（明示公式は定理 7.2 を参照）．キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式は，第 7 章でリー群とリー環の対応を考察する際に重要な役割を果たす．

解答 級数の積を展開すると，

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(\mathbf{1} + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\right)\left(\mathbf{1} + Y + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \mathbf{1} + (X + Y) + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) \\ &\quad + \frac{1}{3!}(X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3) + \cdots \end{aligned}$$

である．仮定より $\|e^X e^Y - \mathbf{1}\| < 1$ がわかるから，上式より，

$$\begin{aligned} &\log(e^X e^Y) = (e^X e^Y - \mathbf{1}) - \frac{(e^X e^Y - \mathbf{1})^2}{2} + \frac{(e^X e^Y - \mathbf{1})^3}{3} - \cdots \\ &= (X + Y) + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \frac{1}{3!}(X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3) + \cdots \\ &\quad - \frac{1}{2}\left((X + Y) + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \cdots\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left((X + Y) + \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \cdots\right)^3 - \cdots. \end{aligned}$$

右辺の 1 次の項は $X + Y$，2 次の項は，

$$\frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2 - (X + Y)^2) = \frac{1}{2}(XY - YX) = \frac{1}{2}[X, Y],$$

3 次の項は，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}(X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3) - \frac{1}{4}(X + Y)(X^2 + 2XY + Y^2) \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{4}(X^2 + 2XY + Y^2)(X + Y) + \frac{1}{3}(X + Y)^3 \\ &= \frac{1}{12}(X^2Y + YX^2 + XY^2 + Y^2X - 2XYX - 2YXY) \\ &= \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) \end{aligned}$$

となる． □

例題 3.22

$X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して次を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)=X.$

(2) $\displaystyle\exp X=\lim_{m\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)^m.$

【解説】 行列の指数関数には，(2) のように通常の指数関数と同様の性質がある．解法にある指数関数と対数関数を用いた論法は，後に 4.6 節で閉線形群とそのリー環の対応を調べる際に用いられる．

解答 (1) 対数関数の定義より $\frac{\|X\|}{m}<1$ のとき

$$m\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)=m\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{X}{m}\right)^j$$
$$=X+X\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{X}{m}\right)^{j-1}$$

だが，

$$\left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\left(\frac{X}{m}\right)^{j-1}\right\|\leq\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\|X\|}{m}\right)^{j-1}=\frac{\frac{\|X\|}{m}}{1-\frac{\|X\|}{m}}\to 0\quad(m\to\infty)$$

より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} m\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)=X.$

(2)

$$\exp X=\exp\left(\lim_{m\to\infty} m\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)\right)\quad((1)\text{ より})$$
$$=\lim_{m\to\infty}\exp\left(m\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)\right)\quad(\exp\text{ の連続性より})$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\exp\left(\log\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)\right)\right\}^m\quad(\exp(mA)=(\exp A)^m\text{ より})$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{X}{m}\right)^m\quad(\|A-\mathbf{1}\|<1\text{ ならば}\exp(\log A)=A\text{ より})$$

□

例題 3.23

$X,Y\in M(n,\mathbb{K})$ に対して，

$$e^{X+Y}=\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m$$

が成り立つことを示せ．

解答

$$e^{\frac{X}{m}}=\mathbf{1}+\frac{X}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

より，

$$e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}} = \mathbf{1} + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\begin{aligned}\log(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}) &= \log\left(\mathbf{1} + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\\ &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\|^2\right)\\ &= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m &= \left(\exp\left(\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)\right)^m\\ &= \exp\left(X + Y + O\left(\frac{1}{m}\right)\right).\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m = \exp(X+Y).$$

□

演習問題 3.11

次の行列 A に対して $\exp A$ を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

演習問題 3.12

2×2 行列 X が相異なる固有値 λ, μ を持つとするとき次の設問に答えよ．

(1) 自然数 m に対して，x^m を X の固有多項式 $f(x) = x^2 - (\mathrm{Tr}\, X)\, x + \det X$ で割った余りは

$$\frac{\lambda^m - \mu^m}{\lambda - \mu}x + \frac{\lambda\mu^m - \mu\lambda^m}{\lambda - \mu}$$

であることを示せ．

(2) (1) の結果とケイリー・ハミルトンの定理を用いて，

$$\exp X = \frac{e^\lambda - e^\mu}{\lambda - \mu}X + \frac{\lambda e^\mu - \mu e^\lambda}{\lambda - \mu}\mathbf{1}$$

を示せ．

平面の回転群の場合に例題 1.1 で見たように，群の変換は無限小変換から指数写像により得られる．リー (1888) は，指数関数のベキ級数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

において，x として無限小変換をとることにより，変換群の元を考察した．本書では，行列の指数関数を主要な道具として，行列の群に対してリーの理論を展開していく．その道筋は，フォン・ノイマン[26] (1929) による先駆的な仕事に基づいて，整備されてきたものである．

第 4 章
閉線形群のリー環

第 2 章で導入した直交群 $O(n)$ およびその一般化であるユニタリ群 $U(n)$，シンプレクティック群 $Sp(n)$ をはじめとする一般線形群の閉部分群に対して，単位行列における接ベクトル空間を考える．第 7 章で見るように，接空間の上でのリー環の代数構造が，曲った空間である閉線形群の構造をほぼ完全に決定するというのがリー理論の驚異である．(既に第 1 章で $SO(2)$ と $SO(3)$ の場合の概略を取り扱った.)

4.1 閉線形群のリー環

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

定義 4.1

n を正の整数とし，$M(n, \mathbb{K})$ 内のパラメーター表示された曲線 $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ を考える．ここでパラメーター t は 0 を含む $\mathbb{R}$ 内の区間に含まれる．$A(t)$ が**滑らかな曲線**であるとは，各成分 $a_{ij}(t)$ が無限回微分可能なことをいう.

G を閉線形群とする．G 内の滑らかな曲線とは，$M(n, \mathbb{K})$ 内の滑らかな曲線で G に含まれるもののことをいう.

$t = 0$ の近傍で定義され $A(0) = \mathbf{1}$ を満たす G 内の滑らかな曲線 $A(t)$ に対して，

$$A'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{A(t) - \mathbf{1}}{t}$$

を $A(t)$ の $\mathbf{1}$ における**接ベクトル**と呼ぶ．$A(0) = \mathbf{1}$ を満たす G 内の滑らかな曲線 $A(t)$ すべてに対する $\mathbf{1}$ における接ベクトル全体の集合を G の $\mathbf{1}$ における**接空間**と呼び，$L(G)$ と書く.（後に見るように $L(G)$ にはリー環の構造が入るので，$L(G)$ を G の**リー環**と呼ぶ．$L(G)$ のことを $\mathrm{Lie}\,(G)$ またはドイツ小文字 $\mathfrak{g}$ で表すこともある.

一般線形群 $GL(n, \mathbb{K})$ のリー環は $M(n, \mathbb{K})$ である（例題 4.1）．これを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．つまり

$$L(GL(n, \mathbb{K})) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M(n, \mathbb{K}).$$

注意 4.1

ここでは閉線形群 G の連結性を仮定していないが，定義より G のリー環は単位行列の近

傍だけで決まる．単位行列を含む G の連結成分 G_0 は閉線形群であり，$L(G)=L(G_0)$ であることを後に見る（例題 6.6）．

例題 4.1
$L(GL(n,\mathbb{K}))=M(n,\mathbb{K})$ であることを示せ．

解答 定義より $L(GL(n,\mathbb{K}))\subset M(n,\mathbb{K})$ であるが，逆に任意の $X\in M(n,\mathbb{K})$ に対して $A(t)=\mathbf{1}+tX$ は $|t|$ が小さいとき $GL(n,\mathbb{K})$ 内の滑らかな曲線を与え，$A'(0)=X$ より $X\in L(GL(n,\mathbb{K}))$ である．したがって，$L(GL(n,\mathbb{K}))=M(n,\mathbb{K})$ である． □

例題 4.2
閉線形群 G に対して，$\mathbf{1}$ における G の接空間 $L(G)$ は実ベクトル空間であることを示せ．

解答 $A(0)=B(0)=\mathbf{1}$ を満たす G 内の滑らかな 2 曲線 $A(t), B(t)$ に対して，$A'(0)=X, B'(0)=Y$ とおく．このとき，G 内の曲線 $A(t)B(t)$，$A(t)^{-1}$ の $\mathbf{1}$ における接ベクトルはそれぞれ $X+Y, -X$ であることを示す．行列の積の定義から $A(t)B(t)$ の成分は $A(t), B(t)$ の成分それぞれの 1 次式の積の和だから，

$$(A(t)B(t))'=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$$

が成り立つ（あるいは，1 変数関数の場合と同様に行列値関数の積の微分の公式が証明される）．$t=0$ とすると，

$$\left.\frac{d(A(t)B(t))}{dt}\right|_{t=0}=A'(0)+B'(0)=X+Y$$

がわかる．ここで $B(t)=A(t)^{-1}$ とおくと，

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0}+\left.\frac{d(A(t)^{-1})}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d(A(t)A(t)^{-1})}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d\mathbf{1}}{dt}\right|_{t=0}=0,$$

したがって，

$$\left.\frac{d(A(t)^{-1})}{dt}\right|_{t=0}=-X$$

が従う．
実数 k に対して $A(kt)$ は G 内の滑らかな曲線で，微分して $t=0$ とすることにより $kX\in L(G)$ であることがわかるから，$L(G)$ は実ベクトル空間をなす． □

例題 4.3
G を 閉線形群とするとき，次を示せ．
(1) $g\in G, Y\in L(G) \Longrightarrow gYg^{-1}\in L(G)$.
(2) $X, Y\in L(G) \Longrightarrow [X,Y]\in L(G)$.

解答 (1) $A(t)$ を $A(0)=\mathbf{1}, A'(0)=Y$ を満たす G 内の滑らかな曲線とすると，$B(t)=gA(t)g^{-1}$ は G 内の滑らかな曲線で $B(0)=\mathbf{1}$ を満たす．$B'(0)=gA'(0)g^{-1}=$

$gYg^{-1} \in L(G)$ である．
(2) $A(t)$ を $A(0) = \mathbf{1}$, $A'(0) = X$ を満たす G 内の滑らかな曲線とする．(1) より

$$\frac{A(t)YA(t)^{-1} - Y}{t} \in L(G)$$

であり，その $t \to 0$ のときの極限は例題 4.2 の解答より

$$\frac{d}{dt}(A(t)YA(t)^{-1})\bigg|_{t=0} = A'(0)YA(0)^{-1} + A(0)Y\,\frac{d(A(t)^{-1})}{dt}\bigg|_{t=0} = XY - YX$$

だから，$[X, Y] = XY - YX \in L(G)$ である（部分空間 $L(G) \subset M(n, \mathbb{K})$ は閉集合であることに注意）． □

例題 4.4
$M(n, \mathbb{K})$ 上のカッコ積 $[\,,\,]$ は次を満たすことを示せ．
(1) $[Y, X] = -[X, Y]$.
(2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$（**ヤコビ恒等式**）．

解答 (1) $[Y, X] = YX - XY = -(XY - YX) = -[X, Y]$.
(2) $[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = (XY - YX)Z - Z(XY - YX) = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$ より

$$\begin{aligned} &[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\ &= (XYZ - YXZ - ZXY + ZYX) + (YZX - ZYX - XYZ + XZY) \\ &\quad + (ZXY - XZY - YZX + YXZ) = 0. \end{aligned}$$

□

【解説】 閉線形群 G に対して，$L(G)$ がカッコ積について閉じていることは，著しい性質である．一般に線形空間 $\mathfrak{g}$ 上にカッコ積（$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線形写像）が定義されていて，例題 4.4 の (1)（交代性）と (2)（ヤコビ恒等式）が満たされるとき，$\mathfrak{g}$ は**リー環**であるという．例題 4.4 は，閉線形群 G に対して $L(G)$ がリー環であることを示している．

例題 4.5
閉線形群 G が可換群ならば，$L(G)$ は可換，すなわち任意の $X, Y \in L(G)$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つことを示せ．

解答 $A(t)$, $B(t)$ を G 内の滑らかな曲線で $A(0) = B(0) = \mathbf{1}$, $A'(0) = X$, $B'(0) = Y$ を満たすものとする．G は可換だから，

$$A(t)B(s)A(t)^{-1} = B(s)$$

が成り立つ．両辺の $s = 0$ における偏微分係数をとると，

$$A(t)YA(t)^{-1} = Y$$

であり，さらに両辺の $t = 0$ における微分係数をとると，例題 4.3 より $[X, Y] = 0$ が

従う． □

【解説】 $[X,Y]$ は $GL(n,\mathbb{K})$ の非可換性を単位元における接ベクトル空間 $M(n,\mathbb{R})$ に反映していると見ることができる．

また上の解答の議論より，$X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在して，$\exp tX$ と $\exp sY$ が任意の $t, s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して可換ならば，$[X,Y]=0$ であることがわかる．

例題 4.6
閉線形群 G の点 g における接ベクトル空間は $L(G)$ と同型であることを示せ．

解答 $A(t)$ を $A(0)=g$ を満たす G 内の滑らかな曲線とすると，$B(t)=g^{-1}A(t)$ は $B(0)=\mathbf{1}$ を満たす G 内の滑らかな曲線である．g における G の接ベクトル空間は $A'(0)=gB'(0)$ の全体，すなわち $gL(G)=\{gX : X \in L(G)\}$ であり，これは $L(G)$ と同型なベクトル空間である． □

演習問題 4.1
G, H は閉線形群，H は G の正規部分群とすると，それらのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ に対して，

$$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h} \implies [X,Y] \in \mathfrak{h}$$

が成り立つことを示せ．

4.2 直交群のリー環

定義 4.2
$M(n,\mathbb{K})$ の部分空間 $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ を

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) : {}^tX + X = 0\},$$
$$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : {}^tX + X = 0\},$$
$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^* + X = 0\},$$
$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(2n) : {}^tXJ_n + J_nX = 0\}$$

により定める．ただし J_n は定義 2.11 で定義した行列である．

$\mathfrak{so}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ はそれぞれ $SO(n), U(n), Sp(n)$ のリー環である．

例題 4.7
(1) $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ の実ベクトル空間としての次元を求めよ．
(2) 次が成り立つことを示せ．
$X \in \mathfrak{so}(n)$ ならば $\exp X \in SO(n)$．
$X \in \mathfrak{u}(n)$ ならば $\exp X \in U(n)$．
$X \in \mathfrak{sp}(n)$ ならば $\exp X \in Sp(n)$．
(3) $SO(n), U(n), Sp(n)$ のリー環はそれぞれ $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ であることを示せ．
(4) $\mathfrak{sp}(n) = \eta_n(\{X \in M(n,\mathbb{H}) : X^* + X = 0\})$ を示せ（η_n は例題 2.17 参照）．

解答 (1) 実交代行列 X は，$1 \le i < j \le n$ に対する (i,j) 成分 x_{ij} を自由に与えることができ，残りの成分は $x_{ji} = -x_{ij}$ により決まる（対角成分はすべてゼロになる）．したがって，$\mathfrak{so}(n)$ の次元は

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$X \in \mathfrak{u}(n)$ では，$1 \le i < j \le n$ に対する (i,j) 成分 x_{ij} として任意の複素数を与えることができ，$x_{ji} = -\bar{x}_{ij}$，また対角成分は $x_{ii} + \bar{x}_{ii}$ より純虚数である．したがって $\mathfrak{u}(n)$ の次元は,

$$2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

$X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ を $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ のように n 次正方行列のブロックに分割すると，${}^tXJ_n + J_nX = 0$ は

$$X_{21} = {}^tX_{21}, \quad X_{12} = {}^tX_{12}, \quad X_{22} = -{}^tX_{11}$$

と同値であることがわかる．また $X \in \mathfrak{u}(2n)$ だから，$X_{11} \in \mathfrak{u}(n)$, $X_{22} = -{}^tX_{11}$，X_{12} は複素対称行列，$X_{21} = -X_{12}^*$ である．したがって，$\mathfrak{sp}(n)$ の次元は,

$$n^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1).$$

(2) $X \in \mathfrak{so}(n)$ に対して，例題 3.10 より

$${}^t(\exp X) \exp X = \exp {}^tX \exp X = \exp(-X) \exp X = \mathbf{1},$$

$\det(\exp X) = e^{\mathrm{Tr} X} = e^0 = 1$ より $\exp X \in SO(n)$.
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n)$ についても同様である．$X \in \mathfrak{sp}(n)$ とすると $X \in \mathfrak{u}(2n)$ より $\exp X \in U(2n)$ である．また ${}^tX = -J_nXJ_n^{-1}$ より,

$$\begin{aligned} {}^t(\exp X) J_n \exp X &= \exp({}^tX) J_n \exp X = \exp(-J_nXJ_n^{-1}) J_n \exp X \\ &= J_n \exp(-X) J_n^{-1} J_n \exp X = J_n \exp(-X + X) = J_n, \end{aligned}$$

したがって，$\exp X \in Sp(n)$ である．
(3) $A(t)$ を $SO(n)$ 内の滑らかな曲線で $A(0) = \mathbf{1}$ を満たすものとする．定義 2.7 より，${}^tA(t)A(t) = \mathbf{1}$ である．両辺を t で微分すると,

$${}^tA'(t)A(t) + {}^tA(t)A'(t) = 0.$$

$t = 0$ とすると,

$${}^tA'(0) + A'(0) = 0$$

となり，$\mathbf{1}$ における接ベクトル $A'(0)$ は実交代行列である．
逆に任意の n 次実交代行列 X に対してワン・パラメーター群 $A(t) = \exp tX$ を考えると，(2) より $A(t)$ は $SO(n)$ 内の滑らかな曲線である．したがって，$X = A'(0) \in L(SO(n))$

である．以上で $L(SO(n)) = \mathfrak{so}(n)$ が示された．

$L(U(n)), L(Sp(n))$ についても $U(n), Sp(n)$ の定義（定義 2.9, 定義 2.11）を用いて $L(SO(n))$ の場合と同様に示すことができる．

(4) 例題 2.17 より $\mathfrak{sp}(n) = \eta_n(M(n, \mathbb{H})) \cap \mathfrak{u}(2n)$ である．$X = A + Bj \in M(n, \mathbb{H})$ に対して，$(A + Bj)^* = A^* - jB^* = A^* - {}^tBj$, $\eta_n(X) = \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ だから，

$$\begin{aligned} X + X^* = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad A + A^* = 0 \text{ かつ } -B + {}^tB = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \eta_n(X) + \eta_n(X)^* = 0. \end{aligned}$$

□

【解説】 $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ は定義 4.5 の意味で $\mathbb{R}$ 上のリー環になっている．これらがカッコ積について閉じていることは，例題 4.3 からわかるが，これは定義 4.2 から直接示すことも容易である．

定義より $L(O(n)) = L(SO(n)) = \mathfrak{so}(n)$ である．また $L(O(n, \mathbb{C})) = L(SO(n, \mathbb{C})) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ である（演習問題 4.2）．このように直交群と特殊直交群のリー環は等しいので，$\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ のことをそれぞれ $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{o}(n, \mathbb{C})$ と書くこともある．

$L(Sp(n)) = \mathfrak{sp}(n)$, $\exp \mathfrak{sp}(n) \subset Sp(n)$ を $SO(n), U(n)$（実数，複素数）の場合と同様に四元数を用いて $M(n, \mathbb{H})$ 内の議論で示すこともできるが，詳細には踏み込まない．

演習問題 4.2

次の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ の実ベクトル空間としての次元を求めよ．

(2) $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ならば $\exp X \in SO(n, \mathbb{C})$ であることを示せ．

(3) $O(n, \mathbb{C}), SO(n, \mathbb{C})$ のリー環は $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ であることを示せ．

例題 4.8

$\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ がカッコ積 $[X, Y] = XY - YX$ について閉じていることを定義から直接示せ．

解答 $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$ ならば，

$$\begin{aligned} {}^t[X, Y] + [X, Y] &= {}^t(XY - YX) + XY - YX \\ &= {}^tY\,{}^tX - {}^tX\,{}^tY + XY - YX \\ &= (-Y)(-X) - (-X)(-Y) + XY - YX = 0, \end{aligned}$$

したがって，$[X, Y] \in \mathfrak{so}(n)$. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{u}(n), \mathfrak{sp}(n)$ についても同様． □

演習問題 4.3

次の問いに答えよ．

(1) $B_\theta = \exp \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) 任意の $A \in SO(3)$ に対して，ある $P \in SO(3)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して，$P^{-1}AP = B_\theta$ と表せることを示せ．

(3) $\exp : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$ は全射であることを示せ．

演習問題 4.4

$I_{n,1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1) \in GL(n, \mathbb{R})$ とする．$L(SO(n,1)) = \mathfrak{so}(n,1)$, $L(U(n,1)) = \mathfrak{u}(n,1)$ とおくとき，

$$\mathfrak{so}(n,1) = \{X \in M(n+1, \mathbb{R}) : {}^tXI_{n,1} + I_{n,1}X = 0\},$$

$$\mathfrak{u}(n,1) = \{X \in M(n+1, \mathbb{C}) : X^*I_{n,1} + I_{n,1}X = 0\},$$

および，$\dim \mathfrak{so}(n,1) = n(n+1)/2$, $\dim \mathfrak{u}(n,1) = n^2$ を示せ．

演習問題 4.5

n 次実交代行列 X に対して

$$c(t) = \left(\mathbf{1} + \frac{t}{2}X\right)\left(\mathbf{1} - \frac{t}{2}X\right)^{-1}$$

とおくと，$c(t)$ は $t = 0$ の近傍で定義された $SO(n)$ 内の滑らかな曲線を与え，$c(0) = \mathbf{1}$, $c'(0) = X$ を満たすことを示せ．

4.3 $SL(n, \mathbb{K})$ と $SU(n)$ のリー環

この節では定義にしたがって，$SL(n, \mathbb{K})$ （$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）と $SU(n)$ のリー環を求める．閉線形群のほうで行列式が 1 という条件は，リー環のほうではトレースが 0 という条件に対応している．

例題 4.9

行列式の展開を用いて次を示せ．$A(t) \in GL(n, \mathbb{K})$ を $A(0) = \mathbf{1}$ を満たす滑らかな曲線とするとき，

$$\left.\frac{d}{dt}\det A(t)\right|_{t=0} = \mathrm{Tr}\, A'(0)$$

が成り立つ．

解答　$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$ から第 1 行，第 j 列を除いてできる $n-1$ 次小行列を $A(t)_{1j}$ とすると，

$$\det A(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j}(t) \det A(t)_{1j}$$

が成り立つ．$A(0) = \mathbf{1}$ より，$t = 0$ における微分係数は，

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\det A(t)\right|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(a'_{1j}(0)\det A(0)_{1j} + a_{1j}(0)\left.\frac{d}{dt}\det A(t)_{1j}\right|_{t=0}\right) \\ &= a'_{11}(0) + \left.\frac{d}{dt}\det A(t)_{11}\right|_{t=0} \end{aligned}$$

である．同様に行列式の展開を繰り返して

$$\frac{d}{dt}\det A(t)\bigg|_{t=0} = a'_{11}(0) + a'_{22}(0) + \cdots + a'_{nn}(0) = \operatorname{Tr} A'(0)$$

を得る． □

定義 4.3

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{su}(n)$ を

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in M(n,\mathbb{K}) : \operatorname{Tr} X = 0\},$$
$$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : X^* + X = 0,\ \operatorname{Tr} X = 0\}$$

により定める．

これらはそれぞれ $SL(n,\mathbb{K})$, $SU(n)$ のリー環である（例題 4.10）．

演習問題 4.6

次の設問に答えよ．

(1) 例題 4.9 を用いて，$\det(\exp A) = e^{\operatorname{Tr} A}$ を示せ．

(2) $\exp \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) \subset SL(n,\mathbb{K})$ を示せ．

例題 4.10

例題 4.9 を用いて次を示せ．

(1) $L(SL(n,\mathbb{K})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$.

(2) $L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)$.

また $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, $\mathfrak{su}(n)$ の $\mathbb{R}$ 上の次元を求めよ．

解答 (1) $A(t)$ を $A(0) = \mathbf{1}$ を満たす $SL(n,\mathbb{K})$ 内の滑らかな曲線とすると，$\det A(t) = 1$. 例題4.9 より $\operatorname{Tr} A'(0) = 0$，したがって，$L(SL(n,\mathbb{K})) \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ である．逆に $\operatorname{Tr} X = 0$ ならば，例題 3.14（あるいは演習問題 4.6）より $A(t) = \exp tX$ は $SL(n,\mathbb{K})$ 内の滑らかな曲線で，$A'(0) = X \in L(SL(n,\mathbb{K}))$ である．したがって $L(SL(n,\mathbb{K})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ である．

(2) $A(t)$ を $A(0) = \mathbf{1}$ を満たす $SU(n) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$ 内の滑らかな曲線とすると，$L(U(n)) = \mathfrak{u}(n)$, $L(SL(n,\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ より $A'(0) \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n)$，したがって $L(SU(n)) \subset \mathfrak{su}(n)$ である．逆に $X \in \mathfrak{su}(n)$ とすると，例題 3.14 および例題 4.7 (2) より $A(t) = \exp tX \in SU(n)$ となるから，$X = A'(0) \in L(SU(n))$，したがって $L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)$ である．

$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$，つまり $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき $d = 1$，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき $d = 2$ とおくと，

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = dn^2 - 1, \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(n) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n) - 1 = n^2 - 1.$$

□

例題 4.11

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ の基底

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H$$

を満たすことを示せ.

解答 カッコ積の定義より容易にわかる. □

演習問題 4.7

$\mathfrak{su}(2)$ は次の形で与えられることを示せ.

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

演習問題 4.8

例題 3.16 を用いて，$\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$ は全射でないことを示せ．また像を調べよ.

演習問題 4.9

$I_{n,1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1) \in GL(n, \mathbb{R})$ とする．$L(SU(n, 1)) = \mathfrak{su}(n, 1)$ とおくとき,

$$\mathfrak{su}(n, 1) = \{X \in M(n+1, \mathbb{C}) : X^* I_{n,1} + I_{n,1} X = 0, \ \mathrm{Tr}\, X = 0\}$$

および，$\dim \mathfrak{su}(n, 1) = n^2 - 1$ を示せ.

演習問題 4.10

$L(SO(n, 1)) = L(O(n, 1))$ を示せ.

4.4 $Sp(n, \mathbb{K})$ のリー環

定義 4.4

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし,

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in M(2n, \mathbb{K}) : {}^t X J_n + X J_n = 0\}$$

とおく（ただし J_n は定義 2.11 で定義した行列）.

例題 4.12

$L(Sp(n, \mathbb{K})) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ であることを示せ．また $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ を求めよ.

解答 定義 2.15，定義 4.4 を用いて例題 4.7 と同様に示される.

$X \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ を $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ のように n 次正方行列のブロックに分割すると,

${}^tXJ_n + J_nX = 0$ は

$$X_{21} = {}^tX_{21}, \quad X_{12} = {}^tX_{12}, \quad X_{22} = -{}^tX_{11}$$

と同値である．したがって，$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ とすると，

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = d\left(n^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}\right) = dn(2n+1)$$

である． □

【解説】 例題 4.7，例題 4.12 の解答から，$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$, $\mathfrak{sp}(n)$ は次のように表すことができる．

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} : A,\ B,\ C \in M(n, \mathbb{K}),\ {}^tB = B,\ {}^tC = C \right\},$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{u}(n),\ B \in M(n, \mathbb{C}),\ {}^tB = B \right\}.$$

4.5 リー環の複素化

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であり，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の間に次のような明らかな関係がある．

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) + i\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cap i\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \{0\}.$$

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の**複素化**と呼び，$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ と書く．

例題 4.13
$\mathfrak{u}(n) \cap i\mathfrak{u}(n) = \{0\}$ であることを示せ．

解答 $X = iY$ $(X, Y \in \mathfrak{u}(n))$ すると，$X^* = -X$, $Y^* = -Y$ より $-X = iY$ となる．$X = iY$ と合わせて，$X = Y = 0$ がわかる． □

注意 4.2
$\mathfrak{u}(n)$ は $\mathbb{C}$ 上のリー環ではなく，$\mathbb{R}$ 上のリー環である．

本節で現れた閉線形群のリー環の中で $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ のように，実リー環の複素化が複素リー環になっているような例を挙げる．

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}),$$
$$\mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}).$$

右辺の複素リー環を左辺の実リー環（添え字 $\mathbb{C}$ をとったもの）の**複素化**と呼ぶ．また左辺の実リー環を右辺の複素リー環の**実形**と呼ぶ．たとえば，$\mathfrak{su}(n)$ の複素化は $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ であり，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ および $\mathfrak{su}(n)$ はともに $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の実形である．上に現れる実リー環 $\mathfrak{g}$ においてカッコ積は $[X,Y]=XY-YX$ により与えられるから，$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカッコ積は $\mathfrak{g}$ のカッコ積を複素双線形に拡張したものになっている．

閉線形群についても複素化，実形という言葉を使う．たとえば，$SU(n)$ の複素化は $SL(n,\mathbb{C})$ であり，$SU(n)$ および $SL(n,\mathbb{R})$ は $SL(n,\mathbb{C})$ の実形である．

例題 4.14
上に挙げたリー環の複素化を確かめよ．

解答 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ であり，$X=X_1+iX_2$ $(X_1,\,X_2\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ において $\mathrm{Tr}\,X=0$ であることと $\mathrm{Tr}\,X_1=\mathrm{Tr}\,X_2=0$ であることは同値だから，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ である．

$X_1,\,X_2\in\mathfrak{u}(n)$ に対して，$X_1+iX_2\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})=M(n,\mathbb{C})$ であることは明らかだが，任意の $X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対してこのような $X_1,\,X_2\in\mathfrak{u}(n)$ が一意に定まる．実際，$X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対して，

$$X_1=\frac{X-X^*}{2},\quad X_2=\frac{X+X^*}{2i}$$

とおくと，$X=X_1+iX_2$ であり，$X_1^*=-X_1,\,X_2^*=-X_2$，すなわち $X_1,\,X_2\in\mathfrak{u}(n)$ が成り立つ．X に対してこのような $X_1,\,X_2$ は一意的である．実際，$X_1+iX_2=Y_1+iY_2$ $(X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\mathfrak{u}(n)$ とすると，$X_1-Y_1=i(Y_2-X_2)$．例題 4.13 より $X_1=Y_1,\,X_2=Y_2$ である．

その他についても同様に示される． □

4.6 リー環上の指数写像

これまでに見た閉線形群の例，$G=GL(n,\mathbb{K}),\,SL(n,\mathbb{K}),\,U(n),\,SU(n),\,O(n),\,SO(n),\,O(n,\mathbb{C}),\,SO(n,\mathbb{C}),\,Sp(n),\,Sp(n,\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) では，ワン・パラメーター群を利用してそのリー環 $\mathfrak{g}=L(G)$ を決定した．これらの例では，G のリー環の元 $X\in\mathfrak{g}=L(G)$ が定めるワン・パラメーター部分群が G に含まれる．すなわち，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\exp tX\in G$ が成立する．これは $X\in\mathfrak{g}$ であるための十分条件でもあるから，これらの例では，

$$\mathfrak{g}=L(G)=\{X\in M(n,\mathbb{K})\,:\,\exp tX\in G\ (^\forall t\in\mathbb{R})\}$$

が成り立っている．本書では，閉線形群 G のリー環 $L(G)$ を単位行列における接空間として定義したが，一般の閉線形群に対して上式が成り立つ（定理 4.1）．したがって，これを $L(G)$ の定義とすることもできる．

例題 4.15
$A(t)$ が $A(0)=\mathbf{1},\,A'(0)=X$ を満たす閉線形群 G 内の滑らかな曲線であるとき，

$$X = \lim_{t \to 0} \frac{\log A(t)}{t}$$

が成り立つことを示せ.

解答 $\|A(t) - \mathbf{1}\| < 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\log A(t)}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (A(t) - \mathbf{1})^j \\ &= \frac{A(t) - \mathbf{1}}{t} - \frac{A(t) - \mathbf{1}}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j+1} (A(t) - \mathbf{1})^j\end{aligned}$$

である. $\|A(t) - \mathbf{1}\| < 1/2$ のとき,

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j+1} (A(t) - \mathbf{1})^j \right\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \|A(t) - \mathbf{1}\|^j = \frac{\|A(t) - \mathbf{1}\|}{1 - \|A(t) - \mathbf{1}\|}$$

および

$$\lim_{t \to 0} A(t) = \mathbf{1}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{A(t) - \mathbf{1}}{t} = A'(0) = X$$

より,

$$X = \lim_{t \to 0} \frac{\log A(t)}{t}$$

が従う. □

例題 4.16
G を閉線形群とするとき, 任意の $X \in L(G)$ に対して $\exp X \in G$ であることを示せ.

解答 $A(t)$ を $A(0) = \mathbf{1}$, $A'(0) = X$ を満たす G 内の滑らかな曲線とする. 正の整数 m に対して $t = 1/m$ として例題 4.15 を適用すると,

$$\begin{aligned}\exp X &= \exp\left(\lim_{m \to \infty} m \log A\left(\frac{1}{m}\right)\right) \\ &= \lim_{m \to \infty} \exp\left(m \log A\left(\frac{1}{m}\right)\right) \quad (\exp \text{ の連続性}) \\ &= \lim_{m \to \infty} \left\{\exp\left(\log A\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right\}^m \quad (\text{可換な行列に対する指数法則}) \\ &= \lim_{m \to \infty} A\left(\frac{1}{m}\right)^m \quad (\text{局所的に } \log \text{ の逆写像は } \exp)\end{aligned}$$

$A(1/m) \in G$ より $A(1/m)^m \in G$ である. $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ は閉部分集合だから G 内の点列の正則な極限 $\exp X$ は G に属することがわかる. □

【解説】 $G = GL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$, $U(n)$, $SL(n, \mathbb{K})$ に対して例題 4.16 の主張が成り立つことは既に本章の前半で個別に確かめた. 上で与えた任意の閉線形群に対する証明では, 例題 3.22 (2) で $\exp X = \lim_{m \to \infty} \left(\mathbf{1} + \dfrac{X}{m}\right)^m$ を示したときと同じ議論を用いていることに注意する.

例題 4.16 は，$GL(n,\mathbb{K})$ のワン・パラメーター群が最初に G に接していれば，全体が G に含まれることを示している．これより，ワン・パラメーター群を用いて閉線形群のリー環を特徴づけることができる（定理 4.1）．

定理 4.1

任意の閉線形群 G に対して，

$$L(G) = \{X \in M(n,\mathbb{K}) : \exp tX \in G\ ({}^\forall t \in \mathbb{R})\}$$

が成り立つ．

演習問題 4.11

例題 4.1，例題 4.7，および定理 4.1 を用いて $L(SL(n,\mathbb{K})) = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ および $L(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)$ を示せ．

指数写像は $M(n,\mathbb{C})$ の単位行列の近傍から $GL(n,\mathbb{C})$ への単射で，その逆写像は log により与えられる．また $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群 G に対して，指数写像の $L(G)$ への制限は $L(G) \subset M(n,\mathbb{C})$ から G への写像になる（例題 4.16）．実は，指数写像は $L(G)$ の 0 の近傍から G への単射で，その逆写像は log により与えられる．$r > 0$ に対して

$$B_r = \{X \in M(n,\mathbb{C}) : \|X\| < r\}$$

とおく．

定理 4.2

G を閉線形群，$\mathfrak{g}$ を G のリー環とするとき，次が成り立つ．

(1) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp X \in G$ である．

(2) ある $r > 0$ が存在して，$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は $\mathfrak{g}$ における 0 の近傍 $B_r \cap \mathfrak{g}$ から G における $\mathbf{1}$ の近傍 $\exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ の上への同相写像でその逆写像は log により与えられる．

[証明] (1) は例題 4.16 で示した．重要な事実なので，定理 4.2 (2) の証明を与えておく．

G を $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群，$\mathfrak{g} = L(G)$ をそのリー環とする．例題 4.16 より，$\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) \subset \exp(B_r) \cap G$ である．十分小さい $r > 0$ に対して $\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) \supset \exp(B_r) \cap G$，すなわち $\log(\exp(B_r) \cap G) \subset B_r \cap \mathfrak{g}$ が成り立つことを背理法により示す．G における $\mathbf{1}$ の任意の近傍の log による像が $\mathfrak{g}$ に含まれないと仮定すると，G の点列 $\{A_m\}_{m=1,2,\ldots}$ で

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \mathbf{1}, \quad \log A_m \notin \mathfrak{g}$$

を満たすものが存在する．$M(n,\mathbb{C})$ における $\mathfrak{g}$ の直交補空間を $\mathfrak{g}^\perp$ とすると，

$$\log A_m = X_m + Y_m \quad (X_m \in \mathfrak{g},\ Y_m \in \mathfrak{g}^\perp,\ Y_m \neq 0)$$

と表される．$\{Y_m/\|Y_m\|\}_{m=1,2,\ldots}$ は $\mathfrak{g}^\perp$ 内のノルムが 1 の点列だから閉集合 $\{X \in \mathfrak{g}^\perp : \|X\| = 1\}$ 内に集積点 Y を持つ．収束する部分列をとることにより，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{Y_m}{\|Y_m\|}=Y$$

としてよい.

主張 1 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\exp(X_m+Y_m)-\exp X_m-Y_m}{\|Y_m\|}=0.$

実際,

$$\begin{aligned}\|\exp(X_m+Y_m)-\exp X_m-Y_m\| &= \left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(X_m+Y_m)^j-X_m^j}{j!}\right\| \\ &\le \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(\|X_m\|+\|Y_m\|)^j-\|X_m\|^j}{j!} \\ &= e^{\|X_m\|+\|Y_m\|}-e^{\|X_m\|}-\|Y_m\|\end{aligned}$$

であり，$m\to\infty$ のとき，$\|X_m\|\to 0$, $\|Y_m\|\to 0$ より,

$$\frac{e^{\|X_m\|+\|Y_m\|}-e^{\|X_m\|}-\|Y_m\|}{\|Y_m\|}=\frac{e^{\|X_m\|}(e^{\|Y_m\|}-1)}{\|Y_m\|}-1 \quad\to\quad 0,$$

したがって主張 1 が証明された.

主張 1 より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\exp(X_m+Y_m)-\exp X_m}{\|Y_m\|}=Y,$$

したがって,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\exp(-X_m)\exp(X_m+Y_m)-\mathbf{1}}{\|Y_m\|}=Y$$

が成り立つ. $T_m=\exp(-X_m)\exp(X_m+Y_m)$ とおくと，$-X_m\in\mathfrak{g}$ より $\exp(-X_m)\in G$（例題 4.16），$\exp(X_m+Y_m)=A_m\in G$ だから，$T_m\in G$ であり,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_m-\mathbf{1}}{\|Y_m\|}=Y$$

が成り立つ. $t\in\mathbb{R}$ に対して，a_m を $t/\|Y_m\|$ にもっとも近い整数とすると,

$$\lim_{m\to\infty}a_m(T_m-\mathbf{1})=tY$$

が成り立つ. 例題 3.22 (1) と同様の議論により,

$$\lim_{m\to\infty}a_m\log T_m=tY$$

が従う. 例題 3.22 (2) と同様の議論により,

$$\lim_{m\to\infty}T_m^{a_m}=\exp tY$$

が従う. 閉線形群 G の点列の極限で正則行列であるから，$\exp tY\in G$ となり，定理 4.1 より $Y\notin\mathfrak{g}$ に矛盾する.

十分小さい $r>0$ に対して，$\exp : B_r\cap\mathfrak{g}\to\exp(B_r\cap\mathfrak{g})$ は連続で，その逆写像は連

続写像 log （の制限）により与えられるから，定理が証明された． □

定理 4.2 は，閉線形群とそのリー環の理論において非常に重要な役割を果たす．定理 4.2 の証明において G が「閉」であることを本質的に用いている．閉であるという仮定を外してもリー群とリー環の対応を定式化することができるが，本書では取り扱いが易しく重要な例の多くを含む閉線形群の場合に話を限る（定理 7.7 やその前後の記述も参照のこと）．

定理 4.2 (2) よりも強い，$\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ が微分同相写像であるという主張が成り立ち，これより閉線形群 G は微分可能多様体であることが従う（6.3 節参照）．

定理 4.2 より，$\mathbf{1}$ のある近傍に含まれる G の任意の 2 元は e^X, e^Y $(X,\, Y \in \mathfrak{g})$ の形をしており，$e^X e^Y = e^Z$ $(Z \in \mathfrak{g})$ と表される．Z はキャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式（例題 3.21）

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \cdots$$

により与えられる．右辺は $X+Y$ と X, Y からカッコ積で得られる項の和の形をしている．（一般の展開項の形はディンキンの公式（定理 7.2）で与えられる．）これは，$\mathbf{1}$ の近傍における閉線形群 G の積構造がリー環 $\mathfrak{g}$ の演算から決定されることを示している（第 7 章参照）．

演習問題 4.12

$SU(2)$ について次の問いに答えよ．

(1) $X \in \mathfrak{su}(2)$, $\det X = 1$ とする．

$$\exp \theta X = \mathbf{1} \cos\theta + X \sin\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

を示せ．

(2) $\mathfrak{su}(2)$ 内の直線 $\{\theta X : \theta \in \mathbb{R}\}$ の指数写像による像は $SU(2) \simeq S^3$ 内のどのような図形か？

(3) $\exp \mathfrak{su}(2) = SU(2)$ を示せ．

演習問題 4.13

直線のアファイン変換群（演習問題 2.21）

$$\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

について次の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{R})$ のリー環を求め，リー環の元に対して行列の指数関数を計算せよ．指数写像は全射か？

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$ により $\mathrm{Aff}(1,\mathbb{R})$ を右半平面とみなすとき，ワン・パラメーター部分群はどのような曲線か？

4.7 リー環の定義と基本概念

閉線形群のリー環を定義し，その例を見てきたが，リー環の概念は閉線形群を離れて定義される．本節では，リー環の定義を与え基本概念を整理しておく．

定義 4.5
標数ゼロの可換な体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ と**カッコ積**と呼ばれる $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への写像 $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ が次の 3 条件を満たすとき，$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{K}$ 上の**リー環**または**リー代数**であるという．

(i) カッコ積は双線形，すなわち任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対して $X \mapsto [X, Y]$, $X \mapsto [Y, X]$ は $\mathfrak{g}$ の線形変換である．

(ii) 任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, X] = 0$.

(iii) （**ヤコビ恒等式**）$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ $({}^{\forall}X, Y, Z \in \mathfrak{g})$.

リー環はドイツ小文字で表記する習慣がある．以下では，$\mathfrak{g}$ は有限次元であると仮定し，リー環と言ったら有限次元リー環を指すものとする．また，体 $\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ の場合を考える．

例題 4.1，例題 4.4 は，$L(GL(n, \mathbb{K})) = M(n, \mathbb{K})$ が $[X, Y] = XY - YX$ をカッコ積としてリー環になることを示している．

V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元線形空間とする．V 上の線形変換全体の集合 $\mathrm{End}\, V$ に対してカッコ積を $[X, Y] = XY - YX$ $(X, Y \in \mathrm{End}\, V)$ により定義するとき，$\mathrm{End}\, V$ は $\mathbb{K}$ 上のリー環になる．このようにリー環と見なした $\mathrm{End}\, V$ を $\mathfrak{gl}(V)$ と書く．V が n 次元線形空間であるとき，その基底を固定すると，$\mathrm{End}\, V$ は n 次正方行列全体 $M(n, \mathbb{K})$ と同一視されるが，これをリー環と見なしたものを $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ と書く．$\mathfrak{gl}(V)$ や $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ を**一般線形リー環**と呼ぶ．V が無限次元線形空間の場合にも無限次元リー環 $\mathfrak{gl}(V)$ を考えることができるが，本書では有限次元リー環だけを扱う．

リー環 $\mathfrak{g}$ に対して $[X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ 全体の集合を $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ と書く．$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{0\}$，すなわち任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y] = 0$ が成り立つとき $\mathfrak{g}$ は**可換**であるという．

演習問題 4.14
ベクトル空間 V に対して，カッコ積を $[X, Y] = 0$ $({}^{\forall}X, Y \in V)$ により定めると V は可換なリー環になることを示せ．

演習問題 4.15
リー環の定義の条件 (ii) は次と同値であることを示せ．
(ii′) $[X, Y] = -[Y, X]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$.

2 つのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間の線形写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が任意の $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ を満たすとき，f は**準同型写像**であるという．

2 つのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ が**同型**であるとは，準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ であって全単射であるものが存在することをいう．このような f をリー環の**同型写像**という．

演習問題 4.16
$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ がリー環の同型写像であるとき，$f^{-1} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ もリー環の同型写像である

ことを示せ.

リー環 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**部分リー環**（あるいは部分リー代数）であるとは,

$$X, Y \in \mathfrak{h} \implies [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすことを言う．リー環の部分リー環はリー環である．リー環の準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ の像は $\mathfrak{g}'$ の部分リー環である．

V を n 次元線形空間とするとき，リー環 $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の部分リー環を**線形リー環**という．

演習問題 4.17

$\mathfrak{g}$ が線形リー環であるとき，写像 $X \mapsto \mathrm{Tr}\, X$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像であることを示せ．

演習問題 4.18

G, H を閉線形群，H は G の部分群とするとき，$L(H)$ は $L(G)$ の部分リー環であることを示せ．

例題 4.17

n を正の整数とする．V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元次元線形空間とするとき，次の $\mathfrak{gl}(V)$ の部分集合は部分リー環であることを示せ．

(1) $\mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \mathrm{Tr}(X) = 0\} \quad (n = \dim V)$.
（$A \in \mathrm{End}\, V$ のトレース $\mathrm{Tr}\, A$ とは，V のある基底に関する A の表現行列の対角成分の和である．トレースは基底の取り方によらず定まる.）

(2) $V = \mathbb{K}^{2n}$ とし，行列 $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ により定まる V 上の交代形式 $f(v, w) = {}^t v J_n w$ $(v, w \in V)$ に対して，$f(Xv, w) + f(v, Xw) = 0$ を満たす $X \in \mathrm{End}\, V$ 全体の集合を $\mathfrak{sp}(V)$ または $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ とする．すなわち，

$$\mathfrak{sp}(V) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : {}^t XJ + JX = 0\}.$$

(3) $V = \mathbb{K}^n$ とし，V 上の対称 2 次形式 $f(v, w) = {}^t vw$ $(v, w \in V)$ に対して，$f(Xv, w) + f(v, Xw) = 0$ を満たす $X \in \mathrm{End}\, V$ の集合を $\mathfrak{o}(V)$ または $\mathfrak{o}(n, \mathbb{K})$ とする．すなわち，

$$\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : {}^t X + X = 0\}.$$

(4) $\mathfrak{sp}(V) \subset \mathfrak{sl}(V)$, $\mathfrak{o}(V) \subset \mathfrak{sl}(V)$ を示せ．

用語 $\mathfrak{sl}(V)$ を**特殊線形リー環**，$\mathfrak{sp}(V)$ を**シンプレクティックリー環**，$\mathfrak{o}(V)$ を**直交リー環**という．

解答 (1) トレースの性質 $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, $\mathrm{Tr}(X + Y) = \mathrm{Tr}\, X + \mathrm{Tr}\, Y$ から $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ の部分リー環である．

(2) $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$ とすると，

$$\begin{aligned}{}^t[X,Y]J + J[X,Y] &= {}^t(XY - YX)J + J(XY - YX) \\ &= {}^tY\,{}^tXJ - {}^tX\,{}^tYJ + JXY - JYX \\ &= {}^tY({}^tXJ + JX) - {}^tX({}^tYJ + JY) \\ &\quad + ({}^tXJ + JX)Y - ({}^tYJ + JY)X = 0\end{aligned}$$

より $[X,Y] \in \mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$ となる．したがって $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{K})$ は $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{K})$ の部分リー環である．
(3) $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K})$ が $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ の部分リー環であることは (2) の前半部分と同様に示すことができる（J として単位行列をとった形）．
(4) 前者は (2) の解答の後半部分から，後者は交代行列であることから従う． □

演習問題 4.19
$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ は次のように $\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$ の部分リー環と見なせることを示せ．

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \,:\, A,\, B \in M(n,\mathbb{R}) \right\}.$$

演習問題 4.20
次の $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ の部分集合は部分リー環であることを示せ．

(1) $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \,:\, a_i \in \mathbb{K} \right\}$ （対角行列全体）．

(2) $\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \right\}$ （対角成分がすべてゼロの上三角行列全体）．

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ （上三角行列全体）．

4.5 節で触れた複素化は，任意の実リー環に対して定義される．

例題 4.18
$\mathbb{R}$ 上のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して，その複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上のリー環になることを示せ．

解答 $\mathfrak{g}$ は実ベクトル空間だから $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は複素ベクトル空間である．実際，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は加法について閉じており，複素数倍についても，

$$(a + bi)(X + iY) = aX - bY + i(aY + bX) \quad (a, b \in \mathbb{C},\ X, Y \in \mathfrak{g})$$

より閉じている．$\mathfrak{g}$ のカッコ積を $[\ ,\ ]$ とするとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカッコ積は双線形性より，

$$[X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i([Y_1, X_2] + [X_1, Y_2])$$

により定まる．これにより $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ がリー環になることは容易に確かめられる． □

実リー環 $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とする．このとき $\mathfrak{g}$ を複素リー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の**実形**と呼ぶ．例題 4.14 で見たように，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(n)$ はともに $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の実形である．

演習問題 4.21

$\mathfrak{g}$ を複素単純リー環，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}$ の実形の 1 つとするとき，$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は実単純リー環であることを示せ．

演習問題 4.22

R を $\mathbb{K}$ 上の線形空間で双線形写像 $R \times R \to R$, $(x,y) \mapsto xy$ が定義されているものとする（このような R を分配代数という）．ライプニッツの規則

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad (x,\, y \in R)$$

を満たす R の線形変換を R の**微分**と呼び，R の微分全体の集合を $\mathrm{Der}(R)$ と書く．

(1) $\mathrm{Der}(R)$ はカッコ積 $[x,y] = xy - yx$ により $\mathfrak{gl}(R)$ の部分リー環であることを示せ．

(2) $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$（$n$ 変数多項式環）のとき，

$$\mathrm{Der}(R) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \ : p_j(x) \in R \right\}$$

であることを示せ．$\mathrm{Der}(R)$ はカッコ積について閉じているが，R の積について閉じていないことを確かめよ．

演習問題 4.23

$u,\, v \in \mathbb{R}^3$ に対して $[u,v] = u \times v$（ベクトルの外積）と定めると，$\mathbb{R}^3$ はリー環になることを示せ．またこのリー環は $\mathfrak{su}(2)$ と同型であることを示せ．

$\mathfrak{g}$ をリー環とする．$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}$ の線形変換 $\mathrm{ad}\, X$ を

$$\mathrm{ad}\, X(Y) = [X,Y] \quad (Y \in \mathfrak{g})$$

により定義する．写像 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ．

例題 4.19

リー環 $\mathfrak{g}$ の随伴表現について次の設問に答えよ．

(1) $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{ad}\,[X,Y] = [\mathrm{ad}\, X,\, \mathrm{ad}\, Y] \quad (X,\, Y \in \mathfrak{g})$ を示せ．

解答 (1) ヤコビ恒等式は

$$[Z,[X,Y]] = [[Z,X],Y] + [X,[Z,Y]]$$

と書き換えることができる．これはライプニッツ規則

$$\mathrm{ad}\, Z([X,Y]) = [\mathrm{ad}\, Z(X), Y] + [X, \mathrm{ad}\, Z(Y)],$$

に他ならず，$\mathrm{ad}\, Z$ が微分であることを示している．

(2) ヤコビ恒等式は

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]]$$

と書き換えることができる．これは $\mathrm{ad}\,[X,Y] = [\mathrm{ad}\, X,\, \mathrm{ad}\, Y]$ を意味する． □

注意 4.3
リー環 $\mathfrak{g}$ から $\mathrm{End}\,V$（V は線形空間）への準同型写像を $\mathfrak{g}$ の V 上の**表現**と呼ぶ．(2) は ad が $\mathfrak{g}$ の表現であることを示している．表現については，第 7 章以降で詳しく扱う．

リー環 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ が**イデアル**であるとは，

$$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h} \implies [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

を満たすことをいう．

演習問題 4.1 は次の命題が成り立つことを示している．

命題 4.3
G, H は閉線形群，H は G の正規部分群であるとき，$L(H)$ は $L(G)$ のイデアルになる．

演習問題 4.24
$\mathfrak{su}(n)$ は $\mathfrak{u}(n)$ のイデアルであることを示せ．

演習問題 4.25
$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ をリー環の準同型写像とするとき，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであることを示せ．

定義 4.6
リー環 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \ ({}^{\forall}Y \in \mathfrak{g})\}$$

を $\mathfrak{g}$ の**中心**という．

リー環 $\mathfrak{g}$ が $\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 以外のイデアルを持たず，さらに可換でないとき，$\mathfrak{g}$ は**単純**であるという．リー環 $\mathfrak{g}$ が単純リー環の直和であるとき $\mathfrak{g}$ は**半単純**であるという．また，リー環 $\mathfrak{g}$ が半単純リー環と可換リー環の直和であるとき $\mathfrak{g}$ は**簡約**であるという．

複素単純リー環は，1800 年代後半にキリング，エンゲル，カルタンらによって分類された．複素単純リー環は，4 つの系列

$$\mathfrak{sl}(n+1, C) \quad (n \geq 1),$$
$$\mathfrak{o}(2n+1, \mathbb{C}) \quad (n \geq 2),$$
$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \quad (n \geq 2),$$
$$\mathfrak{o}(2n, \mathbb{C}) \quad (n \geq 4)$$

とそれ以外の 5 つで尽くされる．前者の 4 系列は**古典型単純リー環**，残りの 5 つは**例外型単純リー環**と呼ばれる．複素単純リー環の分類はルート系の分類に帰着される．本書では，第 8 章，第 9 章で $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のルート系を扱うが，ルート系の一般論や複素単純リー環の分類は扱わない．詳細は，[5], [18] を参照のこと．（ルート系の分類は，[23] でも解説されている．）

リー環の単純性については，例題 5.1 (2) およびその後の解説も参照のこと．

第 5 章
3 次元空間の回転

空間の回転群 $SO(3)$ はリー群の基本的な例であり，応用上も重要である．$SU(2) \simeq Sp(1)$ から $SO(3)$ の上への準同型写像が存在し，核は $\{\pm\mathbf{1}\}$ である．また，$Sp(1)\times Sp(1)$ から $SO(4)$ の上への準同型写像が存在し，核は $\{\pm(1,1)\}$ である．

5.1 $SO(3)$ と $\mathfrak{so}(3)$

第 1 章で見たように，3 次回転群 $SO(3)$ のリー環 $\mathfrak{so}(3)$ は 3 次実交代行列全体の集合であり，

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を基底として持つ．

例題 5.1

(1) $[J_x, J_y] = J_z, \quad [J_y, J_z] = J_x, \quad [J_z, J_x] = J_y$ を示せ．

(2) $\mathfrak{so}(3)$ は単純であることを示せ．

解答 (1) $[X,Y] = XY - YX$ を用いて計算すればわかる．

(2) 定義 4.6 を満たすことを確かめる．$I \subset \mathfrak{so}(3)$ をゼロでないイデアルとし，ゼロでない元 $X = xJ_x + yJ_y + zJ_z \in I$ をとる．x, y, z のいずれかはゼロでないが，たとえば $z \neq 0$ とする．(1) より $[J_x, X] = yJ_z - zJ_y \in I$，$[J_z, [J_x, X]] = [J_z, yJ_z - zJ_y] = zJ_x \in I$. したがって，$J_x \in I$ である．さらに $J_y = [J_z, J_x] \in I$, $J_z = -[J_y, J_x] \in I$. 基底 J_x, J_y, J_z をすべて含むから $I = \mathfrak{so}(3)$ が成り立つ．$x \neq 0$ または $y \neq 0$ のときも同様である．したがって $\mathfrak{so}(3)$ は単純である． □

【解説】 実リー環 $\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{o}(3)$ は単純だから，その複素化 $\mathfrak{o}(3, \mathbb{C})$ は複素単純リー環である．また $\mathfrak{so}(3)$ と同型なリー環 $\mathbb{R}^3$（カッコ積は外積），$\mathfrak{sp}(1)$, $\mathfrak{su}(2)$，それらの複素化 $\mathbb{C}^3$, $\mathfrak{sp}(1, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は，いずれも複素単純リー環である．

実または複素の古典型リー環 $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{o}(n)$ $(n > 4)$, $\mathfrak{sp}(n)$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$

が単純であることは，第 4 章の最後に触れた分類よりわかるが，例題 5.1 (2) と同様にイデアルのゼロでない元とリー環の元のカッコ積を繰り返しとることにより示すこともできる.

原点を通る直線 l 上の任意の点が $g \in SO(3)$ により固定されるとき，l を g の**回転軸**と呼ぶ．回転軸の方向ベクトルは，g の固有値 1 の固有ベクトルである.

例題 5.2
任意の $g \in SO(3)$ は回転軸を持つことを示せ．また，$g \neq \mathbf{1}$ ならば回転軸はただ 1 つであることを示せ.

解答 例題 2.4 より g は固有値 1 を持ち，対応する固有ベクトルを方向ベクトルとし，原点を通る直線が回転軸である．固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を 1 つとり，原点を通り $\boldsymbol{v}$ に垂直な平面を π とする．$g \in SO(3)$ より，g の π 上への制限は，行列式が 1 の直交変換，つまり回転である．平面の自明でない回転は固有値 1 を持たないから，g の固有値 1 の重複度は 1 である. □

演習問題 5.1
$\exp\theta J_x$, $\exp\theta J_y$, $\exp\theta J_z$ は，それぞれ x, y, z 座標軸の周りの角 θ の回転，すなわち例題 1.2 の $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ であることを示せ.

$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して $X_{\boldsymbol{x}} \in \mathfrak{so}(3)$ を $X_{\boldsymbol{x}} = xJ_x + yJ_y + zJ_z$ により定める.

例題 5.3
次の問いに答えよ.

(1) 単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を軸とする角 θ の回転を表す行列は $\exp\theta X_{\boldsymbol{v}}$ で与えられることを示せ．ただし，$\boldsymbol{v}$ を軸とする回転とは，直線 $\{t\boldsymbol{v}\colon t \in \mathbb{R}\}$ を回転軸とする回転であり，回転の向きは $\boldsymbol{v}$ について右ねじの向きとする.

(2) 単位ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ に対して $\exp\theta X_{\boldsymbol{v}}$ は次式で与えられることを示せ.

$$\begin{aligned}\exp\theta X_{\boldsymbol{v}} &= \mathbf{1} + (\sin\theta)X_{\boldsymbol{v}} + (1-\cos\theta)X_{\boldsymbol{v}}^2 \\ &= \mathbf{1} + \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} v_1^2-1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2-1 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2-1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) 単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を軸として $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を角 θ 回転したベクトル $(\exp\theta X_{\boldsymbol{v}})\,\boldsymbol{x}$ は次式で与えられることを示せ.

$$(\exp\theta X_{\boldsymbol{v}})\,\boldsymbol{x} = (\cos\theta)\,\boldsymbol{x} + (\sin\theta)\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}) + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}.$$

解答 $X = X_{\boldsymbol{v}}$ とおく．(1) $\theta X \in \mathfrak{so}(3)$ だから $\exp\theta X \in SO(3)$ である（例題 4.7）．例

題 5.2 より $SO(3)$ の元は固有値 1 を持ち $\mathbb{R}^3$ の回転を表す．$\exp\theta X$ について詳しく見ていく．$|\boldsymbol{v}|=1$ に注意して X の固有値を求めると $0, \pm i$，固有値 0 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}$ であることがわかる．したがって，$\exp\theta X$ の固有値は $1, e^{\pm i\theta}$，固有値 1 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}$ である（例題 3.14）．そして $\boldsymbol{v}$ に垂直な平面への $\exp\theta X$ の制限は回転変換でその固有値は $e^{\pm i\theta}$ だから，回転角の大きさは $|\theta|$ である（演習問題 1.1）．$\boldsymbol{v}$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{x}$ を選ぶと，$\boldsymbol{x}, X\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ は右手系をなす（$\boldsymbol{x}\times X\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{v}$ の正の定数倍になること，あるいは $\det(\boldsymbol{x}, X\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})>0$ が容易に確かめられる）．したがって，回転は右ねじの向きである．

(2) $|\boldsymbol{v}|^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2=1$ より

$$X^2=\begin{pmatrix} v_1^2-1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2-1 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2-1 \end{pmatrix}, \quad X^3=-X$$

がわかる．これを

$$\exp\theta X=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{X^j}{j!}$$

に代入して sin と cos のマクローリン展開を用いることにより，$\exp\theta X$ の表示式が得られる．

(3) $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}$ の行列表示

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} v_2x_3-v_3x_2 \\ v_3x_1-v_1x_3 \\ v_1x_2-v_2x_1 \end{pmatrix}=X\boldsymbol{x}$$

などから容易にわかる． □

【解説】 $\boldsymbol{v}$ を軸とする角 θ の回転が (3) の右辺の式で与えられることは，(1),(2) を用いずにベクトルの幾何を用いて示すこともできる．

例題 5.4

次の問いに答えよ．

(1) $\exp:\mathfrak{so}(3)\to SO(3)$ は全射であることを示せ．

(2) $SO(3)$ は弧状連結であることを示せ．(弧状連結とは，任意の 2 点が連続な曲線で結ばれることをいう.)

(3) $B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}|\le\pi\}$ の元 $\boldsymbol{x}$ に対して $\exp X_{\boldsymbol{x}}$ を対応させる写像は B から $SO(3)$ の上への連続写像であることを示せ．また，この写像は単射であるか？

解答 (1) 例題 5.2 および例題 5.3 (1) より，$\exp:\mathfrak{so}(3)\to SO(3)$ は全射である．

(2) $\mathfrak{so}(3)\simeq\mathbb{R}^3$ は弧状連結だから，その連続写像 exp による像 $SO(3)$ は弧状連結である．

(3) 例題 5.3 (1) より，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，$\exp X_{\boldsymbol{x}}$ は，直線 $\{t\boldsymbol{x} : t\in\mathbb{R}\}$ の周りの角 $|\boldsymbol{x}|$ の回転を表す．$\exp X_{-\boldsymbol{x}}$ は同じ回転軸の周りの反対向きの角 $|\boldsymbol{x}|$ の回転である．$|\boldsymbol{x}|\le\pi$ に

とっておけばすべての回転を表すことができるから，写像 $\boldsymbol{x} \mapsto \exp X_{\boldsymbol{x}}$ は B から $SO(3)$ の上への写像である．連続性は，指数写像および $\boldsymbol{x} \mapsto X_{\boldsymbol{x}}$ の連続性より従う．

1つの回転軸の周りの角 π の回転と $-\pi$ の回転は同じ変換である．これが単射性がくずれる場合である．つまり，B の内部 $B^{\mathrm{int}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| < \pi\}$ 上で写像は単射であるが，$|\boldsymbol{x}| = \pi$ のとき，$\exp X_{\boldsymbol{x}} = \exp X_{-\boldsymbol{x}}$ である． □

【解説】 B 上の同値関係 $\sim$ を $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in B)$，$\boldsymbol{x} \sim -\boldsymbol{x}$ $(|\boldsymbol{x}| = \pi)$ により定義する．上の (3) より $SO(3)$ は，$B/\sim$ と同一視される（実際，同相である）．$B/\sim$ は 3 次元実射影空間 $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ と同相であるから，$SO(3)$ は $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ と同相である．（しかるべく微分構造を入れることにより微分同相になる．）位相については，第 6 章で解説する．

例題 5.5

$\mathfrak{so}(3)$ の基底 J_x, J_y, J_z に関して $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathbb{R}^3$，$GL(\mathfrak{so}(3)) \simeq GL(3, \mathbb{R})$ と見なすとき，$\mathrm{Ad} : SO(3) \to GL(3, \mathbb{R})$ は $g \in SO(3)$ をそれ自身に写す包含写像であること，すなわち

$$\mathrm{Ad}(g)(xJ_x + yJ_y + zJ_z) = g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (g \in SO(3),\, x, y, z \in \mathbb{R})$$

が成り立つことを示せ．

解答 基底 J_x, J_y, J_z に関して $\mathrm{ad}\, J_x, \mathrm{ad}\, J_y, \mathrm{ad}\, J_z$ を行列表示すると，それぞれ J_x, J_y, J_z となることが例題5.1よりわかる．したがって，$\mathrm{ad} : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{End}(\mathfrak{so}(3)) \simeq M(3, \mathbb{R})$ は包含写像である．したがって，$\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}\, X} = e^X$．例題5.3より $\exp : \mathfrak{so}(3) \to SO(3)$ は全射だから，主張が従う． □

【解説】 この問題の結論は，$SO(3)$ の随伴表現と自然表現は同値であることを意味している．（表現の同値は定義 8.1 を参照．）

5.2 $SU(2)$ と空間の回転

$SU(2)$ の随伴表現を考察しよう．一見無関係だが，$SO(3)$ との関連が明らかになる．2 次ユニタリ群 $SU(2)$ は次で与えられる（例題 2.6）．

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

$SU(2)$ のリー環 $L(SU(2)) = \mathfrak{su}(2)$ は 2 次のエルミート交代行列でトレースがゼロのものの全体である（例題 4.10）．

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

と表すことができる（演習問題 4.7）．

例題 5.6

次を示せ.

(1) 任意の $x \in SU(2)$ は

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

の形の行列と共役である．すなわちある $g \in SU(2)$ があって $g^{-1}xg$ が上の形の対角行列になる.

(2) $\exp : \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ は全射である.

(3) $SU(2)$ は弧状連結である.

解答 (1) ユニタリ行列は，その固有値が絶対値 1 の複素数であり，ユニタリ行列により対角化可能である.（これは線形代数の基本事項である．ユニタリ内積を保つユニタリ変換の表現行列であることから容易に示すことができる.）

(2) 上の (1) より，任意の $x \in SU(2)$ に対して，ある $g \in SU(2)$ があって,

$$x = g\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} g^{-1} = g\exp\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g)\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$$

となるから，$x \in \exp \mathfrak{su}(2)$ である.

(3) $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ は弧状連結だから，その連続写像 exp による像 $SU(2)$ は弧状連結である. □

【解説】 本問の議論を用いて，$G = SU(n), U(n)$ に対して，$\exp : L(G) \to G$ が全射であること，および G が弧状連結であることを示すことができる（第 10 章参照）.

$\mathfrak{su}(2)$ の 1 組の基底を

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

により定める．この基底に関する表現行列を考えることにより，$\mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ と $M(3,\mathbb{R})$ を同一視する．$X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ の内積を $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(XY^*)$ により定義する（定義 3.2 で定義した内積の半分）.

例題 5.7

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ どうしの行列としての積は,

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1},$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

を満たすことを確かめよ.

解答 かけ算を一つ一つ実行する. □

【解説】 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ どうしの積の結果は，$\mathfrak{su}(2)$ が純四元数全体と同一視できることを示して

いる．また，$\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で生成される実ベクトル空間は**四元数体**と同型である（2.7 節参照）．このような同型を与える $\mathfrak{su}(2)$ と純四元数の対応，つまり $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の取り方は一意的ではないが，ここでは上のように定める．

例題 5.8
$\mathrm{ad}\,\mathbf{i} = 2J_x$, $\mathrm{ad}\,\mathbf{j} = 2J_y$, $\mathrm{ad}\,\mathbf{k} = 2J_z$ を示せ（J_x, J_y, J_z はこの節の冒頭で定義した $\mathfrak{so}(3)$ の基底）．また，$\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ はリー環の同型写像であることを示せ．

解答 例題 5.7 より $\mathrm{ad}\,\mathbf{i}\,(\mathbf{i}) = 0$, $\mathrm{ad}\,\mathbf{i}\,(\mathbf{j}) = 2\mathbf{k}$, $\mathrm{ad}\,\mathbf{i}\,(\mathbf{k}) = -2\mathbf{j}$ だから，$\mathrm{ad}\,\mathbf{i} = 2J_x$ である．同様に $\mathrm{ad}\,\mathbf{j} = 2J_y$, $\mathrm{ad}\,\mathbf{k} = 2J_z$ である．したがって，$\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ は線形同型写像である．リー環の準同型写像であることは，定理 7.3 よりわかる．（あるいは，$\frac{1}{2}\mathbf{i}$, $\frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\frac{1}{2}\mathbf{k}$ が J_x, J_y, J_z と同じ交換関係（例題 5.1）を満たすことからもわかる．） □

演習問題 5.2
$\frac{1}{2}\mathbf{i}$, $\frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\frac{1}{2}\mathbf{k}$ が J_x, J_y, J_z と同じ交換関係を満たすことを示せ．

例題 5.9
次を示せ．
(1) $X = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$ に対して，$\langle X, X\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
(2) $\mathrm{Ad}\,(SU(2)) \subset SO(3)$.
(3) $\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は全射である．
(4) $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = \{\pm\mathbf{1}\}$.

解答 (1)

$$\langle X, X\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ix_3 & x_2 - ix_1 \\ -x_2 - ix_1 & ix_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

(2) $g \in SU(2)$ に対して，$g^{-1} = g^*$ だから

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}(g)X(\mathrm{Ad}(g)Y)^*) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(gXg^{-1}(gYg^{-1})^*) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(gXg^{-1}gY^*g^{-1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(gXY^*g^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(XY^*) = \langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

より $\mathrm{Ad}(g) \in SO(3)$ である．
(3) $\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}X}$（定理 7.3）および $\mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(3)$ に対する指数写像の全射性より，

$$\mathrm{Ad}(SU(2)) = \mathrm{Ad}(\exp \mathfrak{su}(2)) = \exp(\mathrm{ad}\,\mathfrak{su}(2)) = \exp(\mathfrak{so}(3)) = SO(3)$$

がわかる．
(4) $g \in SU(2)$ が $\mathrm{Ad}(g)X = X$ $({}^\forall X \in \mathfrak{su}(2))$ を満たすとする．$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ だから $gX = Xg$ $({}^\forall X \in \mathfrak{su}(2))$．$X = \mathbf{k}$ とすると，g は対角行列，つまり $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

$(\theta \in \mathbb{R})$ の形をしていることがわかる．さらに $g\mathbf{j} = \mathbf{j}g$ より，$e^{i\theta} = e^{-i\theta}$，すなわち，$e^{i\theta} = \pm 1$，つまり $g = \pm\mathbf{1}$ でなければならない．逆にこのとき $\mathrm{Ad}(g) = \mathbf{1}$ は明らかである．したがって $\mathrm{Ker\,Ad} = \{\pm\mathbf{1}\}$． □

与えられた回転軸の周りの回転に対応する $SU(2)$ の元を具体的に書いておこう．

例題 5.10
次のことを確かめよ．$\mathbb{R}^3$ の座標軸の周りの回転を表す $SU(2)$ と $SO(3)$ の元は以下で与えられる．

$$\exp\theta\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \mathrm{Ad}\,(\exp\theta\mathbf{i}) = \exp(2\theta J_x) = R_x(2\theta),$$

$$\exp\theta\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \mathrm{Ad}\,(\exp\theta\mathbf{j}) = \exp(2\theta J_y) = R_y(2\theta),$$

$$\exp\theta\mathbf{k} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \ \mathrm{Ad}\,(\exp\theta\mathbf{k}) = \exp(2\theta J_z) = R_z(2\theta).$$

ここで，$R_x(2\theta)$, $R_y(2\theta)$, $R_z(2\theta)$ は例題 1.2 で与えた座標軸の周りの回転行列である（回転角は 2θ）．また $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ を単位ベクトル，$\theta \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$\exp\theta(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \mathbf{1}\cos\theta + (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})\sin\theta$$

であり，$\mathrm{Ad}\,(\exp\theta(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})) = \exp(2\theta X_{\boldsymbol{v}})$ は，例題 5.3 で求めた $\boldsymbol{v}$ を軸とする角 2θ の回転行列である．

解答 3 つの座標軸の周りの回転は，一般の軸 $\boldsymbol{v}$ の特別な場合である．

$$X = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \begin{pmatrix} iv_3 & -v_2 + iv_1 \\ v_2 + iv_1 & -iv_3 \end{pmatrix}$$

に対して，$|\boldsymbol{v}| = 1$ より，$X^2 = -\mathbf{1}$ であることがわかる．したがって，

$$\exp\theta X = \mathbf{1}\cos\theta + X\sin\theta$$

である．また，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(\exp\theta(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})) &= \exp\mathrm{ad}\,\theta(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\ &= \exp 2\theta(v_1J_x + v_2J_y + v_3J_z) = \exp(2\theta X_{\boldsymbol{v}}). \end{aligned}$$

□

【解説】 本問と例題 5.3 は，$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ が全射であり，2 対 1 の写像であることを示している．実際，θ と $\theta + \pi$ は異なる $SU(2)$ の元を与えるが，$SO(3)$ の同一の元を与える．

例題 5.3，例題 5.10 でそれぞれ $SO(3)$, $SU(2)$ を用いて書いた軸の周りの回転は，四元数を用いて $Sp(1)$ の元として表すこともできる（記号などは 2.7 節を参照）．

例題 5.11
$Sp(1)$ とそのリー環 $\mathfrak{sp}(1)$ を四元数により

$$Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\},$$
$$\mathfrak{sp}(1) = \mathbb{R}\,i + \mathbb{R}\,j + \mathbb{R}\,k$$

と表し，$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} = gX\bar{g}$ $(g \in Sp(1),\ X \in \mathfrak{sp}(1))$ とする．このとき，単位ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ を軸とする角 θ の回転は，

$$X \mapsto \mathrm{Ad}(g)X, \quad g = \cos\frac{\theta}{2} + (v_1 i + v_2 j + v_3 k)\sin\frac{\theta}{2}$$

により与えられることを示せ．

解答 $Sp(1)$ を複素行列として実現したものは $SU(2)$ である（例題 2.8 (4)，例題 2.19）．例題 5.10 より，単位ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ を軸とする角 θ の回転は，

$$X \mapsto \mathrm{Ad}(g)X, \quad X \in \mathfrak{su}(2),\ g = \mathbf{1} + \cos\frac{\theta}{2} + (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2} \in SU(2)$$

により与えられる．例題 5.7 より $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で生成される実ベクトル空間は四元数体 $\mathbb{H}$ と（積の構造も込めて）同型であり，この同型により $SU(2) \simeq Sp(1)$, $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{sp}(1)$ である．したがって題意が成立する． □

【解説】 例題 5.3，例題 5.10，例題 5.11 で与えた回転を表す式はすべて同等であり，いずれも四元数を用いて空間の回転を表したものと見ることができる．回転軸と回転角による回転の表示は航空機や宇宙船の姿勢の記述，コンピューターグラフィックスにおいて重要な役割を果たしている．

例題 5.12
$R_x(\theta) = \exp\theta J_x$, $R_z(\theta) = \exp\theta J_z$ とおくとき，次を示せ．任意の $g \in SO(3)$ は

$$R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi) \quad (0 \leq \phi,\ \psi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$$

の形で表せる．また，$\theta \neq 0, \pi$ のとき，このような $(\phi,\ \theta,\ \psi)$ は一意である．

【解説】 $(\phi,\ \theta,\ \psi)$ を $SO(3)$ の元の**オイラー角**と呼ぶ．

解答 演習問題 2.30 より，$SO(3)/SO(2) \simeq S^2$ である．$\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1)$ とする．$g \in SO(3)$ に対して，$g\boldsymbol{e}_3$ の球面座標を θ, ϕ とすると，$g\boldsymbol{e}_3 = R_z(\phi)R_x(\theta)\boldsymbol{e}_3$ と表せる．$(R_z(\phi)R_x(\theta))^{-1}g\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$ より，$(R_z(\phi)R_x(\theta))^{-1}g = R_z(\psi)$ となる ψ が存在する．$\phi \neq 0, \pi$，すなわち，$g\boldsymbol{e}_3 \neq \pm\boldsymbol{e}_3$ のとき，$(\phi,\ \theta,\ \psi)$ は一意である． □

演習問題 5.3
$g \in SO(3)$ のオイラー角が $(\phi,\ \theta,\ \psi)$ であるとき，g^{-1} のオイラー角を求めよ．

次で定義される 2 次行列を**パウリ行列**という．

$$\sigma_1 = -i\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = i\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -i\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

パウリ行列は，量子力学においてスピンを記述するためにパウリによって導入されたものである．$i\mathfrak{su}(2)$ は，トレースがゼロの 2 次エルミート行列の全体になるが，パウリ行列はその基底を与える．また，単位行列とパウリ行列は，2 次のエルミート行列のなす実ベクトル空間の基底をなす．また，単位行列とパウリ行列は，複素ベクトル空間 $M(2,\mathbb{C})$ の基底でもある．パウリ行列のいくつかの性質を演習問題として与える．

演習問題 5.4
次を示せ．

(i) $\det \sigma_a = -1 \ (a = 1, 2, 3)$.

(ii) $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$.

(iii) $\sigma_a^2 = \mathbf{1}$, $\sigma_a\sigma_b = -\sigma_b\sigma_a \ (a \neq b)$.

(iv) $(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\mathbf{1}$.

(v) $\exp(i(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)) = \mathbf{1}\cos|\boldsymbol{x}| + \dfrac{i}{|\boldsymbol{x}|}(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)\sin|\boldsymbol{x}|$.
(ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$．)

5.3 メービウス変換と空間の回転

複素平面 $\mathbb{C}$ に新たな 1 つの点 ∞ を付け加え，$z \in \mathbb{C}$ に対して $\lim_{|z|\to+\infty} z = \infty$ を満たすものとする．$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を**拡張された複素平面**と呼ぶ．

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して，次で定義される拡張された複素平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の連続な変換 M_g を**メービウス変換**（一次分数変換）と呼ぶ．

$$M_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

たとえば，$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$M_g(z) = \dfrac{1}{z}$ であり，連続性の要請より $M_g(0) = \infty$, $M_g(\infty) = 0$ である．一般の場合も同様で，M_g $(g \in SL(2,\mathbb{C}))$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ からそれ自身への全単射になる.（例題 5.13 より，M_g の逆写像は $(M_g)^{-1} = M_{g^{-1}}$ で与えられる.）

> **例題 5.13**
> メービウス変換全体の集合は変換の合成に関して群をなすことを示せ．$g \mapsto M_g$ は $SL(2,\mathbb{C})$ からメービウス変換全体のなす群の上への準同型写像でありその核は $\{\pm\mathbf{1}\}$ であることを示せ．

解答 **【解 1】** 任意の g_1, $g_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して，

$$M_{g_2} \circ M_{g_1} = M_{g_2 g_1}$$

となることを示す．$g_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2)$ とおくと，

$$M_{g_2} \circ M_{g_1}(z) = M_{g_2}\Bigl(M_{g_1}(z)\Bigr) = M_{g_2}\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right)$$
$$= \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2}$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}.$$

一方,

$$g_2 g_1 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ a_1 c_2 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

より

$$M_{g_2 g_1}(z) = \frac{(a_1 a_2 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}.$$

したがって, $M_{g_2} \circ M_{g_1} = M_{g_2 g_1}$ が成り立つ. $g_1 = g_2^{-1}$ とすれば, $(M_g)^{-1} = M_{g^{-1}}$ が従う.

$g = \pm\mathbf{1}$ のとき M_g は恒等変換になる. 逆に, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ が $M_g = \mathrm{id}$ (恒等写像) を満たすとすると, $M_g(0) = 0$, $M_g(\infty) = \infty$ より $b = c = 0$ がわかる. $M_g(z) = az/d = z$ より $a = d = \pm 1$, すなわち, M_g が恒等変換になるのは $g = \pm\mathbf{1}$ のとき, そしてそのときに限ることが示された.

【解 2】 $SL(2, \mathbb{C})$ の元 g を $\mathbb{C}^2$ の線形変換と見なしたものとメービウス変換 M_g は次のような関係がある. $g \in SL(2, \mathbb{C})$, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ に対して

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 + b z_2 \\ c z_1 + d z_2 \end{pmatrix},$$
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{a z_1 + b z_2}{c z_1 + d z_2} = \frac{az + b}{cz + d} = M_g(z) \quad \left(z = \frac{z_1}{z_2}\right).$$

行列の積の結合法則より

$$g_2 \left(g_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = (g_2 g_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

上の対応より, $M_{g_2}(M_{g_1}(z)) = M_{g_2 g_1}(z)$ がわかる.

また,

$$\begin{aligned} M_g(z) = z \quad ({}^\forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}) &\iff g k \boldsymbol{z} = g \boldsymbol{z} \ ({}^\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{{}^t(0,0)\},\ {}^\exists k \in \mathbb{C}^\times) \\ &\iff kg = \mathbf{1} \ ({}^\exists k \in \mathbb{C}^\times) \\ &\iff g = \pm\mathbf{1} \quad (\because\ g \in SL(2, \mathbb{C})). \end{aligned}$$

□

xyz 座標空間の原点を中心とする半径 1 の球面 S^2 を考え, S^2 の北極 $N(0, 0, 1)$ と

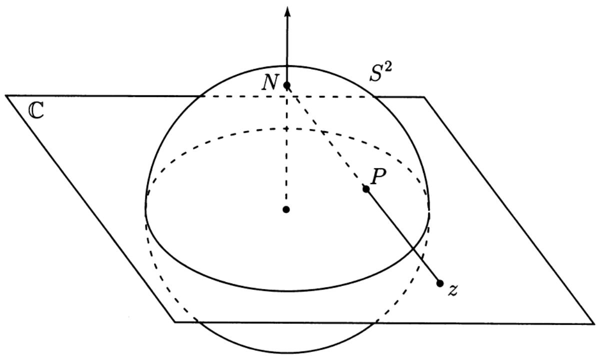


図 5.1　立体射影.

$S^2 \setminus \{N\}$ 上の点 P を結ぶ直線と平面 $z=0$ との交点 $(x, y, 0)$ を複素数 $z = x + iy$ と見なし，写像 $P \mapsto z$ を $S^2 \setminus \{N\}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への**立体射影**または**ステレオグラフィック射影**と呼ぶ（図 5.1）．拡張された複素平面を考え，立体射影による N の像を ∞ と定めると，立体射影は S^2 から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の上への同相写像を定める．

例題 5.14
立体射影により $S^2 \setminus \{N\}$ の点 $P(x_1, x_2, x_3)$ が $z = x + iy$ に写されるとき，

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3},$$
$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{1 + |z|^2}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

であることを示せ.

解答　図 5.2 の三角形の相似より，

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

このとき，$|z|^2$ は，

$$|z|^2 = z\bar{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}.$$

したがって，

$$x_1 + ix_2 = \frac{2z}{|z|^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

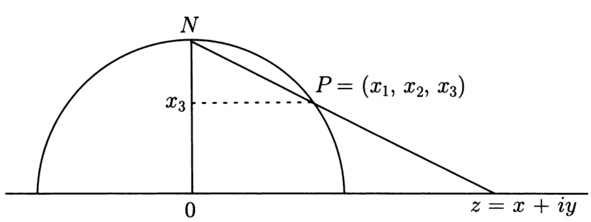


図 5.2　立体射影の断面.

が得られる. □

立体射影により, 拡張された複素平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は球面 S^2 と 1 対 1 に対応する. このように拡張された複素平面と対応させた単位球面を**リーマン球面**と呼ぶ. 例題 5.13 の【解 2】では $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を考え, (z_1, z_2) と $k(z_1, z_2)$ $(k \in \mathbb{C}^\times)$ を同一視して, 拡張された複素平面上の点 $z = z_1/z_2$ と対応づけた. $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の同値関係 $\sim$ を $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow {}^\exists k \in \mathbb{C}^* \ (z_1, z_2) = k(w_1, w_2)$ により定めるとき, $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\sim$ を 1 次元複素射影空間, (z_1, z_2) を $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の**斉次座標**と呼ぶ. $SL(2, \mathbb{C})$ はメービウス変換により $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq S^2$ に作用している.

特に $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ が引き起こす S^2 の変換は $\mathbb{R}^3$ の回転の S^2 への制限になっており, しかも $\mathrm{Ad}(g)$ と一致している. 以下でこれを示す. メービウス変換では比 z_1/z_2 だけが問題だから, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2$ と仮定しても一般性を失わない.

例題 5.15
$(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ と $z = z_1/z_2$ ($(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2$) が立体射影により対応しているとき,

$$x_1 + ix_2 = z_1\overline{z_2}, \qquad x_3 = |z_1|^2 - 1$$

を示せ. また, ${}^t(z_1, z_2)(\overline{z_1}, \overline{z_2})$ を x_1, x_2, x_3 を用いて表し, $g \in SU(2)$ がメービウス変換により引き起こす $S^2 \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の変換は $\mathrm{Ad}(g)$ の $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{su}(2)$ への制限になっていることを示せ.

解答 例題 5.14 の結果を $z = z_1/z_2$ を用いて書き直すと, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 2$ より

$$x_1 + ix_2 = \frac{2z_1\overline{z_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = z_1\overline{z_2},$$
$$x_3 = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2) = 1 - |z_2|^2 = |z_1|^2 - 1$$

となる. $g \in SU(2)$ は ${}^t(z_1, z_2)$ のノルムの 2 乗 $|z_1|^2 + |z_2|^2$ を不変にする. $g \in SU(2)$ に対して,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{w_1}{w_2}, \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

とおくと, $w = M_g(z)$ である. z, w に対応するリーマン球面上の点をそれぞれ (x_1, x_2, x_3), $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1\overline{z_2} \\ z_2\overline{z_1} & |z_2|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ \overline{x_1 + ix_2} & 1 - x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{1} - i\,\mathfrak{su}(2),$$

同様に,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_1} & \overline{w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} i\tilde{x}_3 & -\tilde{x}_2 + i\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + i\tilde{x}_1 & -i\tilde{x}_3 \end{pmatrix}.$$

一方,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_1} & \overline{w_2} \end{pmatrix} &= g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{pmatrix} {}^t\bar{g} \\ &= g \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} \right\} {}^t\bar{g} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - ig \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} g^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\mathrm{Ad}(g) \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

最後の等号は,

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

の随伴表現を用いた. したがって,

$$\mathrm{Ad}(g) \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2 + ix_1 \\ x_2 + ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\tilde{x}_3 & -\tilde{x}_2 + i\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 + i\tilde{x}_1 & -i\tilde{x}_3 \end{pmatrix}$$

である. これは, $SU(2)$ の元によるメービウス変換は, 随伴表現により与えられる $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ の線形変換の $S^2 \simeq \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ への制限になっていることを示している. □

$SU(2)$ が引き起こす $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の変換が球面の回転であることは, 5.2 節で見た通りである.

演習問題 5.5 (立体射影 (例題 5.14) の一般化)

n 次元球面

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

上の点 $N(0, \ldots, 0, 1)$ と N 以外の点 P を結ぶ直線と超平面 $x_{n+1} = 0$ の交点を $(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0)$ とすると,

$$x_i = \frac{2y_i}{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + 1} \quad (1 \le i \le n), \qquad x_{n+1} = \frac{y_1^2 + \cdots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + 1}$$

であることを示せ.

演習問題 5.6

(1) 立体射影とメービウス変換により, リーマン球面は $SL(2, \mathbb{C})$ の等質空間であることを示せ. また, 0 における等方部分群を求めよ.

(2) リーマン球面上の $SL(2, \mathbb{R})$ の軌道をすべて求めよ.

演習問題 5.7 (クォータニオン・ハンドシェイク)

右肩を原点とし, x 軸は後方, y 軸は下方, z 軸は右方に伸びているとして, 3 次元空間内で右手の運動を考える. 右腕を前方に伸ばし手の平を上に向けた位置から始めて, 順次四元数 i, j, k による回転を行うと, 手はどのような位置にくるか実行してみよ.

5.4 $\mathbb{R}^4$ の回転

$\mathbb{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ により，四元数体 $\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}^4$ と見なすとき，単位四元数のなす群 $Sp(1)$ と $\mathbb{R}^4$ の回転が関係づけられることを見る．この節では，$\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}^4$ と見なして話を進める．

例題 5.16
$u \in Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ に対して，変換 $q \mapsto uq$ $(q \in \mathbb{H})$ は，$\mathbb{R}^4$ の回転，すなわち向きを保つ直交変換になることを示せ．

解答 $u = a + bi + cj + dk$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ を単位四元数とすると，$q \mapsto uq$ の表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

である．$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ を用いて，$A \in SO(4)$ であることが確かめられる． □

演習問題 5.8
単位四元数 u に対して，例題 5.16 で考えた $\mathbb{H}$ の変換 $q \mapsto uq$ の代わりに $q \mapsto qu$ としたものも $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の回転変換であることを示せ．

例題 5.17
単位四元数 u に対して，原点を通り u に垂直な $\mathbb{R}^4$ の超平面に関する鏡映は $q \mapsto -u\bar{q}u$ により与えられることを示せ．

解答 例題 5.16 より，$u,\ ui,\ uj,\ uk$ は $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底である．$f(q) = -u\bar{q}u$ とおくと，

$$f(uq) = -u\bar{q}\bar{u}u = -u\bar{q}|u|^2 = -u\bar{q}.$$

したがって，$f(u) = -u,\ f(ui) = ui,\ f(uj) = uj,\ f(uk) = uk$，すなわち，$f$ は $ui,\ uj,\ uk$ で張られる平面に関する鏡映である． □

例題 5.18
定理 2.3 を用いて，$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ の向きを保つ直交変換は，単位四元数 u, v を用いて，$q \mapsto uqv$ と表せることを示せ．

解答 定理 2.3 より，向きを保つ直交変換は，鏡映の 2 回または 4 回の合成で表せる．2 つの鏡映 $q \mapsto -u_1\bar{q}u_1$, $q \mapsto -u_2\bar{q}u_2$ の合成は，$q \mapsto u_1\bar{u}_2q\bar{u}_2u_1$ である．4 つの鏡映の合成も単位四元数 u, v を用いて $q \mapsto uqv$ の形で表せる．逆にこのような形をした変換は，例題 5.16，演習問題 5.8 より，向きを保つ直交変換である． □

例題 5.19

例題 5.18 により得られる全射 $Sp(1) \times Sp(1) \to SO(4):\ (u,v) \mapsto (q \mapsto u^{-1}qv)$ は，準同型写像であることを示し，その核を求めよ．

解答 準同型写像であることは定義より明らかである．$(u,v) \in Sp(1) \times Sp(1)$ が核に含まれる，すなわち，$u^{-1}qv = q$ ($^{\forall} q \in \mathbb{H}$) とする．$q = 1$ とすると，$u^{-1}1v = 1$ より $u = v$ である．$q \mapsto u^{-1}qu$ は，q の実部を固定し，例題 5.11 より虚部に 3 次元空間の回転として作用する．例題 5.9（および $SU(2) \simeq Sp(1)$）より，核は $\pm(1,1)$ である． □

演習問題 5.9

$SO(4)$ は自明でない正規部分群を持つことを示せ．

例題 2.2 で見たように，平面の回転は，複素数のかけ算により表される．ハミルトンは複素数の演算を 3 次元以上に拡張しようと苦心して，1843 年に四元数を発見した．それに続いて，$\mathbb{R}^3$ の回転が四元数を用いて表されることが認識された．四元数を用いた回転の表示式（例題 5.11）は，ロドリーグ，ケイリーの名前で呼ばれる．例題 5.3，例題 5.10，例題 5.11 で与えた，軸の周りの回転を表す式はすべて同等であるが，例題 5.3 (3) の形で述べたのは，20 世紀になってベクトルや外積の記号を発案したギブズである．$\mathbb{R}^4$ の回転が四元数で表されること（例題 5.18）は，ケイリー (1855) が証明した．

例題 5.9，例題 5.10 で見たように，$SU(2)$（あるいは $Sp(1)$）の元 $\pm x$ は，同じ $SO(3)$ の元を与える．これは一見無駄なようであるが，量子力学では 1 周回ると波動関数の符号が変わり，2 周回ると元に戻るスピン 1/2 の粒子（電子など）があり，$SU(2)$ が有用である．$SU(2) \simeq Sp(1)$ は $SO(3)$ の 2 重被覆群であると言い表す（第 6 章も参照のこと）．

四元数と回転，回転の 2 価性に関してさらに知りたい読者は，[3], [20] を参照してほしい．

第 6 章
線形群の位相

この章では，位相について概説し，多様体とリー群の定義を与え，閉線形群がリー群であることを示す．行列の群に対して「閉」や「弧状連結」の概念を既に考察したが，本章ではさらに行列の群の位相を考える．本章で導入する単連結性や普遍被覆群の概念は，閉線形群とそのリー環の対応を考える上で重要となる．

6.1 ユークリッド空間の位相

ユークリッド空間の位相について既出のものも含めて基本事項をまとめておく．

m を正の整数とする．ユークリッド空間

$$\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

の 2 点 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ の間の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2}$$

により定義する．この距離を不変にするような線形変換全体のなす群が m 次直交群 $O(m)$ であった．

上で定義した d は距離の公理を満たしている：

(i) $d(x, y) \geq 0$ であり，$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る．

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ （三角不等式）．

$x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ に対して x を中心とする半径 r の**開球** $B(x, r)$ を

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m : d(x, y) < r\}$$

により定義する．

集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ が**開集合**であるとは，任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して $r > 0$ を十分小さくとると，$B(x, r) \subset X$ が成り立つことをいう．$X \subset \mathbb{R}^m$ の補集合 $\mathbb{R}^m \setminus X$ が開集合であるとき，X は**閉集合**であるという．

例 6.1

次の集合は $\mathbb{R}^m$ の開集合である.

(1) $\mathbb{R}^m$ 自身.

(2) 空集合.

(3) 開球.

(4) 開集合の合併集合.

(5) 有限個の開集合の交わり.

例 6.2

次の集合は $\mathbb{R}^m$ の閉集合である.

(1) $\{y \in \mathbb{R}^m : d(x,y) \leq r\}$ $(x \in \mathbb{R}^m,\ r > 0)$.

(2) 有限集合.

演習問題 6.1

無限個の開集合の交わりは開集合になるとは限らないことを示せ.

$\mathbb{R}^m$ の点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $x \in \mathbb{R}^m$ に収束するとは, $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 整数 N が存在して, $n > N$ ならば $d(x, x_n) < \varepsilon$ が成り立つことをいう.

演習問題 6.2

$\mathbb{R}^m$ の点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が $x \in \mathbb{R}^m$ に収束することと, 任意の j $(1 \leq j \leq m)$ に対して点列 $\{x_n\}$ の第 j 成分からなる数列が x の第 j 成分に収束することは同値であることを示せ.

点 $x \in \mathbb{R}^m$ が集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ の**集積点**であるとは, X の点列 $\{x_n\}$ で x に収束するものが存在することをいう.

演習問題 6.3

$X \subset \mathbb{R}^m$ が閉集合であることと X の任意の集積点が X に含まれることは同値であることを示せ.

$\mathbb{R}^m$ の点列 $\{x_n\}$ が**コーシー列**であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して正の整数 N が存在して, $n, m > N$ ならば $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ が成り立つことをいう. 任意のコーシー列は収束するというのがユークリッド空間の著しい性質である.

集合 S に対してそのすべての開部分集合からなる集合族のことを S の**位相**と呼ぶ. $\mathbb{R}^m$ の位相を上で定義したが, 部分集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ の位相を次のように定める. $X \subset S$ が開集合であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, $r > 0$ が存在して $B(x,r) \cap S \subset X$ が成り立つこととする. このようにして定まる部分集合の位相を**相対位相**と呼ぶ. 本書では, ユークリッド空間の部分集合の位相は常に相対位相を考える. $X \subset S$ が閉集合であるとは, $S \setminus X$ (S における X の補集合) が S の開集合であることと定める. $X \subset S$ が閉集合であることと X の集積点であるような S の点はすべて X に含まれることは同値である.

$X \subset \mathbb{R}^m$ が**有界集合**であるとは, ある $r > 0$ が存在して, $X \subset B(0,r)$ が成り立つことをいう. $X \subset \mathbb{R}^m$ が**コンパクト集合**であるとは, X が $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合であること

をいう．

コンパクト性は位相（開集合の族）の言葉で述べることができる．

定理 6.1 (ハイネ・ボレルの定理)
次は同値である．

(i) （上の定義の意味で）$X \subset \mathbb{R}^m$ はコンパクト集合である．

(ii) $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathbb{R}^m$ が開集合で $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ を満たすならば，有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ が存在して $X \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i}$ が成り立つ．

証明は位相空間の入門書（たとえば [24]）を参照されたい．集合 X がある集合族の合併集合に含まれるとき，その集合族を X の**被覆**と呼ぶ．上の (2) は，「X の任意の開被覆は有限の部分被覆を持つ」と言い表される．

演習問題 6.4
$\mathbb{R}$ の区間 $(0, 1)$ について，有限の部分被覆を持たないような開被覆の例を挙げよ．

l, m を正の整数とする．領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への写像 $f : D \to \mathbb{R}^l$ が D の点 a で**連続**とは，$x \in D$ が a に近づくとき，$f(x)$ が $f(a)$ に近づくことをいう．ε-δ 論法を使っていえば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ が成り立つとき，f は $x = a$ で連続であるという．f が D の任意の点で連続であるとき，f は連続であるという．連続性は位相の言葉で述べることもできる．

命題 6.2
$D \subset \mathbb{R}^m$ 上の写像 $f : D \to \mathbb{R}^l$ に対して次の条件は同値である．

(i) f は連続である．

(ii) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^l$ に対して，$f^{-1}(U) = \{x \in D : f(x) \in U\}$ は D の開集合である．

演習問題 6.5
2 つの連続写像の合成写像は連続であることを示せ．

コンパクト集合上の連続写像はよい振る舞いをする．

命題 6.3
$K \subset \mathbb{R}^m$ はコンパクト集合，$f : K \to \mathbb{R}^l$ は連続写像とする．このとき次が成り立つ．

(i) $f(K)$ はコンパクト集合である．

(ii) f は一様連続である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$x, y \in K$, $d(x, y) < \delta$ ならば $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ が成り立つ．

演習問題 6.6
連続写像による閉集合の像が閉集合にならない例を挙げよ．

D_1, D_2 をユークリッド空間の部分集合とする．$f : D_1 \to D_2$ が連続な全単射で，逆写像 f^{-1} も連続なとき，f は**同相写像**であるという．同相写像が存在するとき，D_1 と D_2 は**同相**または**位相同型**であるという．

演習問題 6.7

$f(x) = e^{ix}$ は $[0, 2\pi)$ から $\mathbb{T}$ への同相写像でないことを示せ.

演習問題 6.8

次の同相を示せ.

(1) $Sp(1) \simeq SU(2)$.

(2) $SU(2) \simeq S^3$.

$D \subset \mathbb{R}^m$ が**弧状連結**であるとは，任意の $x, y \in D$ に対して，連続写像 $f : [0,1] \to D$ で $f(0) = x$, $f(1) = y$ を満たすものが存在することをいう.（D の任意の 2 点が D 内の連続な曲線で結ぶことができるということ.）このような f を x から y への D 内の**道**という.

演習問題 6.9

$\mathbb{R}^2$ の部分集合で弧状連結なものと弧状連結でないものの例を挙げよ．またそれを証明せよ.

演習問題 6.10

$D \subset \mathbb{R}^m$ が弧状連結，$f : D \to \mathbb{R}^l$ が連続写像ならば，$f(D)$ は弧状連結であることを示せ.

演習問題 6.11

n を 2 以上の整数とするとき，n 次元球面 S^n はコンパクトかつ弧状連結であることを示せ.

$D \subset \mathbb{R}^m$ が**離散集合**であるとは，D の任意の異なる 2 点 x, y に対して，$\mathbb{R}^m$ における x, y の近傍 U_x, U_y で $D \cap U_x \cap U_y = \emptyset$ となるものが存在することをいう．言い換えれば，D の異なる 2 点間 x, y の距離 $d(x,y) = |x - y|$ の下限が正であるとき，D を離散集合と呼ぶのである．$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は離散集合の例である.

集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の 3 条件を満たすとき，X を**位相空間**と呼び，$\mathcal{O}$ に属する集合を**開集合**と呼ぶ.

(1) $\emptyset$, $X \in \mathcal{O}$.

(2) $\mathcal{O}$ に属する有限個の集合の共通部分は $\mathcal{O}$ に属する.

(3) $\mathcal{O}$ に属する任意の個数の集合の合併集合は $\mathcal{O}$ に属する.

既に述べたユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の位相，さらにその部分集合の上の相対位相は上の条件を満たしている．コンパクト，弧状連結，連結などの概念は，一般の位相空間に対して定義される.

X_1, X_2 がそれぞれ $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を開集合の族とする位相空間であるとする．直積 $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathcal{O}_i \, (i = 1, 2)\}$ は，$\{O_1 \times O_2 : O_i \in \mathcal{O}_i \, (i = 1, 2)\}$ に属する集合の任意個数の合併集合全体からなる集合族を $\mathcal{O}$ とすることにより位相空間になる．これを位相空間 X と Y の**積空間**と呼ぶ.

演習問題 6.12

6.1 節で述べた $\mathbb{R}^2$ の位相は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の積位相になっていることを示せ.

位相空間 X 上に同値関係 $\sim$ が定義されているとし，商集合 $X' = X/\sim$ を考える．X の元に対してそれを含む同値類を対応させる写像を $\pi : X \to X'$ とする．$O' \subset X'$ に対して，$\pi^{-1}(O') \subset X$ が開集合であるとき，$O' \subset X'$ は開集合であると定めると，X' は位相空間になる．これを位相空間 X の**商空間**と呼ぶ．

位相空間 X の部分集合 Y に対して Y を含む最小の閉集合を Y の**閉包**と呼び，$\overline{Y}$ で表す．Y の閉包は Y にすべての集積点を付け加えた集合に他ならない．$\overline{Y} = X$ であるとき，Y は X において**稠密**であるという．たとえば，有理数全体 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密である．

6.2 線形群の位相

本書は $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群 G を対象としている．

$$GL(n,\mathbb{C}) \subset M(n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$$

であるから，G をユークリッド空間の部分集合とみなして相対位相を考えることができる．

定義 2.13 で既に定義したように，G が**閉線形群**であるとは，G が一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群であることをいう．$O(n)$, $SO(n)$, $SL(n,\mathbb{K})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $Sp(n,\mathbb{K})$ が閉線形群であることは第 2 章で既に見た．後に見るように，閉線形群は群演算が微分可能である微分可能多様体になる．群でもあり多様体でもある対象を一般に**リー群**という．

演習問題 6.13
G が閉線形群であり，$x \in G$ とするとき，$L_x(g) = xg$ $(g \in G)$ は G から G の上への同相写像であることを示せ．

以下では，閉線形群のコンパクト性，弧状連結性について見ていく．

演習問題 6.14
次を示せ．
(1) $GL(n,\mathbb{K})$ は $M(n,\mathbb{K})$ の開集合である．
(2) $SL(n,\mathbb{K})$ は $M(n,\mathbb{K})$ の閉集合である．

$G \subset GL(n,\mathbb{K})$ を部分群とする．$\mathbf{1}$ から x への G 内の道が存在するような $x \in G$ 全体の集合を G_0 とすると，G_0 は弧状連結な集合である．G_0 を単位元を含む G の**弧状連結成分**と呼ぶ．定理 6.4 で示すように，閉線形群に対して連結性と弧状連結性は同値だから，G_0 を G の単位元の**連結成分**と呼ぶ．

例題 6.1
G を $GL(n,\mathbb{K})$ の部分群とするとき，G_0 は G の正規部分群であることを示せ．

解答 $x, y \in G_0$ とする．$f(t)$ を $\mathbf{1}$ から y への G 内の道とすると，$xf(t)$ は x から xy への G 内の道である．$\mathbf{1}$ から x への道とつなげば，$\mathbf{1}$ から xy への G 内の道が得られる．したがって，$xy \in G_0$．また $y^{-1}f(1-t)$ は $\mathbf{1}$ から y^{-1} への道だから，$y^{-1} \in G_0$．

したがって G_0 は G の部分群である.

次に G_0 が G の正規部分群であることを示す. 任意の $x \in G$ に対して xG_0x^{-1} が $\mathbf{1}$ を含む弧状連結集合であることは容易にわかるから, $xG_0x^{-1} \subset G_0$ が成り立つ. 逆向きの包含関係もこれより従う. □

演習問題 6.15

$GL(n, \mathbb{R})$ のコンパクト部分群の任意の元の行列式の値は ± 1 であることを示せ.

演習問題 6.16

n を 1 より大きい整数, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とするとき, $GL(n, \mathbb{K})$, $SL(n, \mathbb{K})$ はコンパクトでないことを示せ.

演習問題 6.17

直線のアファイン変換群 $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$ (演習問題 2.21) はコンパクトでないことを示せ.

例題 6.2

次を示せ.

(1) $SO(2)$ は弧状連結であり, $O(2)$ は 2 つの弧状連結成分を持つ.

(2) $O(2)$ および $SO(2)$ はコンパクト集合である.

解答 (1) $SO(2)$ は $M(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ 内の連続な曲線であるから弧状連結であり, $O(2)$ の中で行列式が -1 である行列全体のなす部分集合も例題 2.3 の解答より同様に弧状連結である. これら 2 つの集合の間を $O(2)$ の中で結ぶ連続な曲線は存在しない. 実際, 2 つの集合が連続な曲線で結べるとすると, 中間値の定理より行列式の値は 1 と -1 の間の任意の値をとらなければならず矛盾が生じる.

(2) 例題 2.3 (5) で求めた $O(2)$ の元の具体形を用いると, 任意の $A \in O(2)$ を $\mathbb{R}^4$ の元と見なしたときのノルムは, $2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$ だから, $O(2)$ は有界集合である. したがって, $O(2)$ および $SO(2)$ はコンパクト集合である. (具体形を用いなくても, 直交行列の列ベクトルは $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底をなすことからノルムが計算できる.) □

例題 6.3

$SO(n)$ は弧状連結であることを示せ. (n に関する帰納法を使う.) また $O(n)$ は 2 つの弧状連結成分を持ち, 単位元を含む弧状連結成分は $SO(n)$ である.

解答 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする ($\boldsymbol{e}_j$ は j 番目の成分が 1 でそれ以外がゼロのベクトル). $A \in SO(n)$ に対して, A の各列 $A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底になっている.

$n = 2$ のとき, 例題 6.2 より $SO(2)$ は弧状連結である. $SO(n-1)$ は弧状連結であると仮定する. $A \in SO(n)$ に対して $A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$ ならば, A は $\boldsymbol{e}_1$ に垂直な $n-1$ 次元空間を不変にし, $SO(n-1)$ の弧状連結性より, $\mathbf{1}_n$ と A を結ぶ連続な曲線が存在する. $A\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1$ の場合は, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で張られる 2 次元空間内の回転 R で $R\boldsymbol{e}_1 = A\boldsymbol{e}_1$ となるものをとる. $A\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_1$ が線形独立なときは, $\boldsymbol{e}_1$ と $A\boldsymbol{e}_1$ で張られる 2 次元空間内の回転 R で $R\boldsymbol{e}_1 = A\boldsymbol{e}_1$ となるものをとる. (いずれの場合も R は 2 次元空間に垂直なベク

トルを不変にする.）$SO(2)$ の弧状連結性より $SO(n)$ 内で $\mathbf{1}_n$ と R を結ぶ道が存在する．$\boldsymbol{Re}_2, \ldots, \boldsymbol{Re}_n$ と $\boldsymbol{Ae}_2, \ldots, \boldsymbol{Ae}_n$ はいずれも $\boldsymbol{Ae}_1 = \boldsymbol{Re}_1$ に垂直な $n-1$ 次元空間の正規直交基底である．$SO(n-1)$ の弧状連結性より $SO(n)$ 内で R と A を結ぶ道が存在する．したがって，$\mathbf{1}_n$ と A を結ぶ $SO(n)$ 内の道が存在する．
後半については，演習問題 2.7 を用いて例題 6.2 と同様に議論する． □

演習問題 6.18

$SU(n)$ は弧状連結であることを示せ．

演習問題 6.19

直交群について次を示せ．

(1) $\exp(\mathfrak{so}(n)) \subset SO(n)$.

(2) $O(n)$, $SO(n)$ はコンパクトである．

演習問題 6.20

$U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ はコンパクトであることを示せ．

例題 6.4

正の整数 k に対して，$\mathbb{T}^k$ はコンパクトかつ弧状連結であることを示せ．

解答 コンパクト性は定義より明らかである．$\mathbb{T}^k$ 上の点 $(1, \ldots, 1)$ と $z = (z_1, \ldots, z_k) = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_k})$ $(\theta_j \in \mathbb{R})$ を結ぶ $\mathbb{T}^k$ 内の連続曲線を，$p(t) = (e^{it\theta_1}, \ldots, e^{it\theta_k})$ $(0 \leq t \leq 1)$ により与えることができる．このような曲線をつなぎ合わせることにより，$\mathbb{T}^k$ 内の任意の 2 点を連続曲線でつなぐことができる． □

例題 6.5

$\mathfrak{p} = \{X \in M(2, \mathbb{R}) : {}^tX = X, \operatorname{Tr} X = 0\}$ とする．

$$SO(2) \times \mathfrak{p} \ \rightarrow \ SL(2, \mathbb{R}) : \quad (k, X) \ \mapsto \ k \exp X$$

は C^∞ 級の微分同相写像であることを示せ．また，$SL(2, \mathbb{R})$ は連結であることを示せ．

【解説】 $\mathbb{R}^2$ は単位円板の内部と同相である．実際，$f(z) = z/(1-|z|^2)$ は，単位円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ から $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ への同相写像である．したがって，$SL(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{T} \times D$，つまり $SL(2, \mathbb{R})$ はトーラス面とその内部の合併集合（ドーナツ）と同相であることがわかる．

解答 例題 2.14，例題 3.15 より，全単射であることはわかっている．例題 3.17 より，$\exp : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_+$（$\mathfrak{p}_+$ は正定値な $\mathfrak{p}$ の元全体）は，C^∞ 級微分同相写像である．例題 2.14 の解答を見ると，$g \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して，$g = k \exp X$ となる $k \in SO(2)$, $X \in \mathfrak{p}$ は，${}^tgg \in \mathfrak{p}_+$ に対して，${}^tgg = \exp 2X$ となる $X \in \mathfrak{p}$ をとると，$k = g \exp(-X)$ として決まっている．したがって，$g \mapsto (k, X)$ は C^∞ 級である．
特に同相 $SO(2) \times \mathfrak{p} \simeq SL(2, \mathbb{R})$ が成り立ち，$SO(2), \mathfrak{p}$ は連結だから，$SL(2, \mathbb{R})$ は連結である． □

演習問題 6.21

$\mathfrak{p} = \{X \in M(2, \mathbb{C}) : X^* = X, \operatorname{Tr} X = 0\}$ とするとき，

$$SU(2) \times \mathfrak{p} \;\to\; SL(2, \mathbb{C}) : \quad (k, X) \;\mapsto\; k \exp X$$

は，C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．また，$SL(2, \mathbb{C})$ は連結であることを示せ．

演習問題 6.22

$U(n)$ は $SU(n) \times U(1)$ と同相であることを示せ．

上の問いと演習問題 6.18 から $U(n)$ が弧状連結であることがわかる．(直接示すこともできる.)

演習問題 6.23

U を $(2, 1)$ 成分がゼロである $SL(2, \mathbb{R})$ の元全体からなる部分集合とする．U は閉線形群であることを示せ．また写像 $SO(2) \times U \to SL(2, \mathbb{R})$ $((x, y) \mapsto xy)$ は同相写像であることを示せ．

演習問題 6.24

次の同相を示せ．

(1) $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm \mathbf{1}\}$.

(2) $SO(3) \simeq \mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

(3) $SO(4) \simeq (Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm(1, 1)\}$.

演習問題 6.25

G を閉線形群，V を $\mathbf{1}$ を含む G の開集合とする．このとき $\mathbf{1}$ を含む V の開部分集合 U で

$$x, y \in U \implies x^{-1}y \in V$$

を満たすものが存在することを示せ．

弧状連結な閉線形群 G とそのリー環 $\mathfrak{g}$ に対して，指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ の像は弧状連結な G の部分集合である．G が $SO(2)$, $SO(3)$, $SU(2)$ の場合に exp が全射であることを見たが，一般に $\exp \mathfrak{g} = G$ が成り立つとは限らない（演習問題 4.8）．弧状連結かつコンパクトな閉線形群に対して，指数写像は全射であることが知られている（命題 10.9，定理 10.10 参照）．

閉線形群の弧状連結性に着目して調べてきたが，次の定理で述べるように，閉線形群に対して弧状連結性と連結性は同値である．さらに連結な閉線形群 G は $\exp \mathfrak{g}$ により生成される．

定理 6.4

閉線形群 G に対して次の条件は同値である．

(i) G は弧状連結である．すなわち，G 内の任意の 2 元を G 内の連続曲線で結ぶことができる．

(ii) G は連結である．すなわち，$G=U\cup V, U\cap V=\emptyset, U\neq\emptyset, V\neq\emptyset$ を満たす開集合 U, V は存在しない．

(iii) G は $\mathbf{1}$ の任意の開近傍により生成される．

(iv) G は $\exp\mathfrak{g}$ で生成される．すなわち，任意の $A\in G$ は，ある $X_1, X_2, \ldots, X_m$ を用いて

$$A=e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m}$$

の形で表される．

[証明] (i) ⇒ (ii). $G=U\cup V$ と互いに交わらない空でない開集合の合併集合で表されたとすると，U の点と V の点を結ぶ G 内の道のパラメーターが属する $\mathbb{R}$ の区間が互いに交わらない空でない開集合に分かれることになり，矛盾.（ここで $\mathbb{R}$ の閉区間が連結であるという非自明な事実を用いた.）

(ii) ⇒ (iii). G の単位元のある近傍 V により生成される部分群を G_0 とすると，任意の $x\in G_0$ に対して $xV\subset G_0$ だから G_0 は G の開集合である．任意の $g\in G$ に対して gG_0 は G の開集合である．$g\notin G_0$ であるすべての g に対する gG_0 の合併集合は G_0 と交わらない開集合になる．(ii) よりそのようなものは存在しないから，$g\in G_0$，つまり $G=G_0$ が成り立つ．

(iii) ⇒ (iv). 明らか.

(iv) ⇒ (i). $A_0, A_1\in G$ とすると，$A_0^{-1}A_1=e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m}$ となる $X_1, \ldots, X_m\in\mathfrak{g}$ が存在する．$A(t)=A_0e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_m}$ とおくと，$A(t)$ は G 内の連続曲線で $A(0)=A_0$, $A(1)=A_1$ を満たす．

以上で条件 (i)–(iv) の同値性は証明されたが，後で有用な考え方を含む，(i) ⇒ (iv) の直接証明を与えておく．定理 4.2 (2) を用いる．G における単位行列の開近傍 V があって，V から $\mathfrak{g}$ への対数写像

$$\log: V\to\mathfrak{g}$$

とその逆写像 exp が V と $\mathfrak{g}$ における 0 の近傍 $\log V$ の間の微分同相を与える．$\mathbf{1}$ を含む V の開部分集合 U で $x, y\in U \implies x^{-1}y\in V$ を満たすものをとる（演習問題 6.25）.

G の弧状連結性より，任意の $A\in G$ に対して，$\mathbf{1}$ から A への道 $A(t)$ が存在する．すなわち $A(t)$ は $A(0)=\mathbf{1}$, $A(1)=A$ を満たす G 内の連続曲線である．$[0,1]$ のコンパクト性より，$[0,1]$ の分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$$

が存在して，各 $1\leq i\leq m$ に対して

$$t_{i-1}\leq t\leq s\leq t_i \implies A(t)^{-1}A(s)\in V$$

が成り立つ.（$\bigcup_{t\in[0,1]}A(t)V$ はコンパクト集合 $\{A(t): t\in[0,1]\}$ の開被覆だから，定理 6.1 より有限の開被覆を持つ.）$k=1, 2, \ldots, m$ に対して

$$A(t_{k-1})^{-1}A(t_k) = \exp X_k \ (X_k \in \mathfrak{g})$$

と書くと,

$$A = A(1) = (A(t_0)^{-1}A(t_1))(A(t_1)^{-1}A(t_2))\cdots(A(t_{m-1})^{-1}A(t_m)) = e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_m}.$$

□

【解説】 閉線形群 G が定理 6.4 の同値な条件を満たすとき, G は**連結**であるという. 定理 6.4 において「閉」という仮定は外すことができる. すなわち, 連結線形群 ($GL(n,\mathbb{K})$ の連結な部分群) G に対してそのリー環 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ が定義され, G は $\exp\mathfrak{g}$ により生成される. これにより連結線形群の全体と線形リー環の全体は 1 対 1 に対応する. これを**リーの対応**と呼ぶ. 詳細は 7.5 節で扱う.

閉線形群 G に対して, 単位行列を含む最大の連結部分集合を G_0 と書き, G の単位行列の連結成分という.

> **例題 6.6**
> 閉線形群 G の単位行列を含む連結成分 G_0 について次を示せ.
> (1) G_0 は $\exp\mathfrak{g}$ により生成される G の部分群である.
> (2) G_0 は G の開集合である.
> (3) G_0 は G の正規部分群である.
> (4) $g \in G$ に対して, gG_0 は g を含む G の連結成分である.

解答 (1) は定理 6.4 の証明より従う. 定理 4.2 (2) の条件を満たす $r > 0$ をとると, 任意の $g \in G_0$ に対して, $g\exp(B_r \cap \mathfrak{g}) \subset G_0$ は g の開近傍である. したがって G_0 は G の開集合である. $g\exp Xg^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g)X$ および (1) より, (3) が従う. $gG_0 \subset G$ は連結部分集合である. U が $gG_0 \subset U \subset G$ を満たす連結集合とすると, $g^{-1}U$ は G_0 を含む G の連結部分集合だから, $g^{-1}U = G_0$, すなわち $U = gG_0$ となり, (4) が従う. □

> **例題 6.7**
> 任意の連結, コンパクト, かつ可換な閉線形群 G に対して, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全射であり, G は $\mathbb{T}^{\dim\mathfrak{g}}$ と同型であることを示せ.

解答 G を連結コンパクト可換閉線形群とすると, そのリー環 $\mathfrak{g} = L(G)$ は可換である (例題 4.5). 例題 3.10 より $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $e^Xe^Y = e^{X+Y}$ が成り立つから, 定理 6.4 より $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は加群 $\mathfrak{g}$ から閉線形群 G の上への準同型写像である.
定理 4.2 より指数写像は $\mathfrak{g}$ における 0 の近傍から G における $\mathbf{1}$ の近傍の上への同相写像である. $Y \in \mathrm{Ker}\ \exp = \{X \in \mathfrak{g} : \exp X = \mathbf{1}\}$ に対して, $e^{X+Y} = e^Xe^Y = e^X$ だから, 指数写像は任意の $Y \in \mathrm{Ker}\ \exp$ の近傍から $\mathbf{1}$ の近傍の上への同相写像である. したがって, $Y \in \mathrm{Ker}\ \exp$ のある近傍内に Y 以外に $\mathrm{Ker}\ \exp$ の点は存在しない. すなわち, $\mathrm{Ker}\ \exp$ は $\mathfrak{g}$ の離散部分群である. したがって, 線形独立なベクトル $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}$ があって,

$$\mathrm{Ker}\ \exp = \{m_1v_1 + \cdots + m_kv_k : m_i \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq i \leq k)\}$$

である．($v_1 \in \mathrm{Ker}\,\exp$ をゼロでない長さが最小の元に選び，$\mathrm{Ker}\,\exp$ が v_1 と線形独立な元を含めば，その中で長さ最小の元 $v_2 \neq 0$ を選ぶ．既に選んだ元のすべてと線形独立な元がとれなくなるまで同様に続けると，$\mathrm{Ker}\,\exp$ は選んだ元 $v_1, \ldots, v_k$ で生成されることがわかる．) $k = \dim \mathfrak{g}$ のとき，

$$G \simeq \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\exp \simeq \mathbb{T}^{\dim \mathfrak{g}}$$

である（後半の同型は，写像

$$\mathfrak{g} \ni t_1 v_1 + \cdots + t_n v_k \ \mapsto \ (e^{2\pi i\, t_1}, \ldots, e^{2\pi i\, t_n}) \in \mathbb{T}^k$$

より従う）．$k < \dim \mathfrak{g}$ とすると，

$$G \simeq \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}\,\exp \simeq \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g} - k}$$

となり G のコンパクト性に矛盾する． □

一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群 H が離散集合であるとき，H を**離散線形群**と呼ぶ．閉線形群 G の部分群 H が離散集合であるとき，H を G の**離散部分群**と呼ぶ．

例題 6.8

次を示せ．

(1) 離散線形群は閉線形群である．

(2) 離散線形群のリー環は $\{0\}$ である．

(3) 閉線形群 G のリー環が $\{0\}$ ならば，G は離散線形群である．

解答 (1) $H \subset GL(n, \mathbb{C})$ を離散線形群，$h \in \overline{H}$ とする（$\overline{H}$ は H の閉包を表す）．$GL(n, \mathbb{C})$ における $\mathbf{1}$ の近傍 U で $U \cap H = \{\mathbf{1}\}$ となるものをとる．さらに $GL(n, \mathbb{C})$ における h の近傍 V で，$V^{-1}V \subset U$ となるものをとる．仮定より $V \cap H \neq \emptyset$ であるが，$x, y \in V \cap H$ とすると，$x^{-1}y \in U \cap H = \{\mathbf{1}\}$ より $x = y$，つまり $V \cap H$ は 1 点からなる．したがって，$h = x \in H$，つまり $\overline{H} = H$ である．

(2) 閉線形群のリー環の定義から明らか．

(3) 閉線形群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ のリー環が $\{0\}$ であるとすると，定理 4.2 より，0 の近傍 B_r $(r > 0)$ があって $\exp B_r \cap G = \exp(B_r \cap \mathfrak{g}) = \{\mathbf{1}\}$ が成り立つ．したがって，$g \in G$ に対して $g \exp B_r \cap G = \{g\}$ であるから，$G \subset GL(n, \mathbb{C})$ は離散集合である． □

本書で主に一般線形群の閉部分群に話を限っているのは技術的な限定であり，本書のテーマである，行列で定義されるリー群とリー環の対応に話を限っても強すぎる制限である．たとえば，$GL(n, \mathbb{C})$ のワン・パラメーター部分群は閉集合とは限らない．これを示す典型例を挙げる．

例 6.3

$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，2 次元トーラス（定義 2.5，例題 2.13）

$$\mathbb{T}^2 \simeq \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} : t,\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

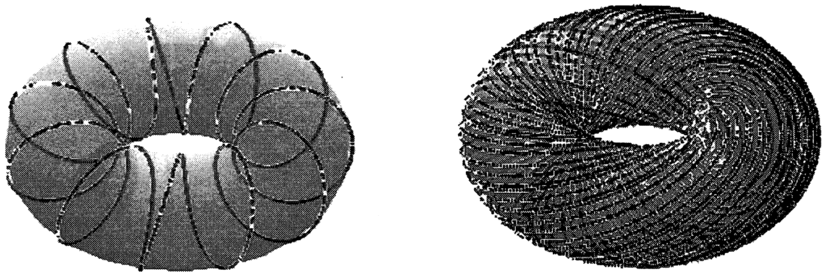


図 6.1　トーラスのワン・パラメーター部分群.

のワン・パラメーター部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

を考える.

$e^{it} = 1$ となるのは，$t \in 2\pi\mathbb{Z}$ であるとき，そしてそのときに限る．したがって，α が無理数のとき，$\mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t}) = \mathrm{diag}(1,1)$ となるゼロでない $t \in \mathbb{R}$ は存在しない．α が無理数のとき，$t \mapsto \mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t})$ は $\mathbb{R}$ から G への群としての同型写像を与える.

α が有理数のとき，$\mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t}) = \mathrm{diag}(1,1)$ となるゼロでない $t \in \mathbb{R}$ が存在する．実際，$\alpha = q/p$（p, q は互いに素な整数）とおくと，$\mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t}) = \mathrm{diag}(1,1)$ となるのは，$t \in 2p\pi\mathbb{Z}$ のとき，そしてそのときに限る．α が有理数のとき，$\mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t}) \mapsto e^{i\alpha t}$ は G から $\mathbb{T}$ への群としての同型写像を与える．またこれは同相写像でもある．そして，G は連続写像 $t \mapsto \mathrm{diag}(e^{it}, e^{i\alpha t})$ による閉区間 $[0, 2|p|\pi]$ の像だから，コンパクト集合である．図 6.1 は，左図は α が有理数の場合の閉曲線の例，右図は α が無理数の場合の模式図である.

α が無理数のとき，G はトーラスに無限に巻きつく曲線であるが，これは $GL(2,\mathbb{C})$ の部分位相に関して閉集合ではなく，この曲線はトーラスにすき間なく巻きついている．すなわち，$\{(e^{it}, e^{i\alpha t}) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{T}^2$ において稠密である．これは 2 次元の場合のクロネッカーの近似定理の言い換えになっている.（本書では稠密性の証明を与えない．クロネッカーの近似定理の証明は，[9, 第 23 章] を参照のこと．リー群論から見た解説は [32, 第 5 章] にある.）

6.3　リー群

本節では，閉線形群が微分可能多様体の構造を持ち，リー群になることを示す.

定理 4.2 (2) より，十分小さい $r > 0$ に対して，指数写像は $\mathfrak{g}$ における 0 の近傍 $B_r \cap \mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{g} : \|X\| < r\}$ から G における $\mathbf{1}$ の近傍 $V_r = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ の上への同相写像を与える．$x \in G$ に対して，G の左移動 L_x を $L_x g = xg$ $(g \in G)$ により定義する．写像 $L_x \circ \exp : X \mapsto x \exp X$ は，$\mathfrak{g}$ における 0 の近傍 $B_r \cap \mathfrak{g}$ か

ら G における x の近傍 xV_r の上への同相写像を与える．φ_x をその逆写像，すなわち $\varphi_x = (L_x \circ \exp)^{-1} = \log \circ L_x^{-1}$ とする．$x, y \in G$ に対して，$xV_r \cap yV_r \neq \emptyset$ であるとき，$\mathfrak{g}$ における 0 の近傍の間の同相写像

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} : \varphi_y(xV_r \cap yV_r) \ \to \ \varphi_x(xV_r \cap yV_r) \tag{6.1}$$

が定義される．また，

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \log \circ L_x^{-1} \circ L_y \circ \log^{-1} = \log \circ L_{x^{-1}y} \circ \exp$$

である．例題 3.18 より，指数写像 exp とその逆写像 log は $M(n, \mathbb{C})$ における 0 の近傍と $\mathbf{1}$ の近傍の間の C^∞ 級微分同相を与えている．また $L_{x^{-1}y}$ は $M(n, \mathbb{C})$ の線形変換である．したがって，$\log \circ L_{x^{-1}y} \circ \exp$ は $B_r = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : ||X|| < r\}$ 上の C^∞ 級写像である．これを部分空間 $\mathfrak{g} \subset M(n, \mathbb{C})$ の開集合 $\varphi_y(xV_r \cap yV_r)$ に制限した写像 (6.1) もまた C^∞ 級写像になる．

一般に，位相空間 M に対して次の (i)–(iv) の条件を満たす $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が定義されているとき，M は $\boldsymbol{m}$ **次元 $\boldsymbol{C^\infty}$ 級微分可能多様体**，または **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級多様体**であるという．

(i) M はハウスドルフ空間である．(すなわち，任意の $x, y \in M$, $x \neq y$ に対して，$U \cap V = \emptyset$ を満たす x の近傍 U と y の近傍 V が存在する．)

(ii) U_α は M の開集合で，$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ を満たす．

(iii) ψ_α は U_α から $\mathbb{R}^m$ への同相写像である．

(iv) $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば，

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は C^∞ 級写像である．

(U_α, ψ_α) を多様体 M の**$\boldsymbol{C^\infty}$ 級座標近傍**，$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級座標近傍系**と呼ぶ．C^∞ 級多様体 M の開部分集合 U は $(U_\alpha \cap U, \psi_\alpha|_{U_\alpha \cap U})$ を C^∞ 級座標近傍とする C^∞ 級多様体である．(U_α, ψ_α) を C^∞ 級多様体 M の 1 つの C^∞ 級座標近傍，$p \in U_\alpha$ とするとき，$\psi_\alpha(p) \in \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ の座標 $x_1, \ldots, x_m$ を p の**局所座標**という．

閉線形群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ はその位相の定義から明らかにハウスドルフであり，上で定義した (φ_x, xV_r) $(x \in G)$ を C^∞ 級座標近傍として C^∞ 級多様体になる．そして多様体の次元は G のリー環 $\mathfrak{g}$ の次元に等しい．

C^∞ 級多様体 M 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が**滑らか**であるとは，任意の C^∞ 級座標近傍に対して，$f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(M) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級関数であることをいう．異なる C^∞ 級座標近傍系が同じ C^∞ 多様体を与えることがある．2 つの C^∞ 級座標近傍系を合わせたものがまた C^∞ 級座標近傍系になるとき，2 つの C^∞ 級座標近傍系は同値であるという．同値な C^∞ 級座標近傍系に対して多様体上の滑らかな関数の概念は一致する．2 つの C^∞ 級多様体 M, N の間の写像 $f : M \to N$ が滑らかとは，M, N それぞれの C^∞ 級座標近傍の間の f に対応する写像たちが滑らかであることをいう．

G を閉線形群とすると $G \times G$ は $(xV_r \times yV_r, \varphi_x \times \varphi_y)$ $(x, y \in G)$ を C^∞ 級座標近傍とする C^∞ 級多様体である．このとき，次が成り立つ．

命題 6.5
G を閉線形群とするとき，$G \times G$ から G への写像 $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ は滑らかである．

[証明] $x_0, y_0 \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g} \cap B_r$ とすると，$\varphi_{x_0}(x_0 e^X) = X$, $\varphi_{y_0}(y_0 e^Y) = Y$ である．このとき，

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}_{x_0 y_0^{-1}}(x_0 e^X (y_0 e^Y)^{-1}) &= \log \circ L^{-1}_{x_0 y_0^{-1}} x_0 e^X e^{-Y} y_0^{-1} \\
&= \log(y_0 e^X e^{-Y} y_0^{-1}) = \log(y_0 e^Z y_0^{-1}) \\
&= \log(e^{\mathrm{Ad}\, y_0(Z)}) = y_0 Z y_0^{-1}.
\end{aligned}
$$

ただしここで $Z = \log(e^X e^{-Y})$ とおいた．X, Y が十分 0 に近いとき，$(X, Y) \mapsto Z$ は滑らかな写像であり，$Z \mapsto y_0 Z y_0^{-1}$ は線形変換だから，

$$
(X, Y) \ \mapsto \ \varphi_{x_0 y_0^{-1}}(\varphi^{-1}_{x_0}(X)(\varphi^{-1}_{y_0}(Y))^{-1})
$$

は滑らかな写像である． □

一般に，C^∞ 多様体 G が群であり，$G \times G$ から G への写像 $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ が滑らかであるとき，G は**リー群**であるという．この節の結論は次の定理にまとめることができる．

定理 6.6 (フォン・ノイマンの定理)
任意の閉線形群 G はリー群である．G の次元はそのリー環 $L(G)$ の次元に等しい．

第 4 章で見たように，複素行列からなる閉線形群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ のリー環は複素ベクトル空間とは限らない．閉線形群の次元はそのリー環の実ベクトル空間としての次元を意味することに注意する．リー環の次元は第 4 章で調べた．たとえば，$\mathbb{T}^n$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ の次元はそれぞれ n, $n(n-1)/2$, n^2, n^2-1, $n(2n+1)$ である．

6.4 等質空間の位相

例題 6.9
例題 2.20，演習問題 2.30, 演習問題 2.31，演習問題 2.32 で示した 1 対 1 対応

$$
\begin{aligned}
&O(n)/O(n-1) \simeq S^{n-1}, \\
&SO(n)/SO(n-1) \simeq S^{n-1}, \\
&U(n)/U(n-1) \simeq S^{2n-1}, \\
&SU(n)/SU(n-1) \simeq S^{2n-1}, \\
&Sp(n)/Sp(n-1) \simeq S^{4n-1}
\end{aligned}
$$

は位相同型（同相）であることを示せ．

解答 $O(n)$ の場合に示す（他の場合も同様に示される）．

$$\pi : O(n) \to S^{n-1}, \quad g \mapsto g\boldsymbol{e}_1$$

は $g \in O(n)$ の 1 列目を取り出す写像だから連続である．商位相の定義より，π が誘導する写像

$$\varphi : O(n)/O(n-1) \to S^{n-1}$$

は連続である．例題 2.20 より φ は全単射だから，φ が開写像，すなわち開集合を開集合に写すことを示せばよい．商位相の定義より π が開写像であることを示せばよい．すなわち，任意の開集合 $U \subset O(n)$ と任意の $g \in U$ に対して，$\pi(g) = g\boldsymbol{e}_1$ の開近傍で $U\boldsymbol{e}_1$ に含まれるものが存在することを示したい．これは，$\boldsymbol{e}_1$ の開近傍で $g^{-1}U\boldsymbol{e}_1$ に含まれるものが存在することと同値である．したがって，$\mathbf{1}$ を含む G の任意の開集合 U に対して，$\boldsymbol{e}_1$ の開近傍で $U\boldsymbol{e}_1$ に含まれるものが存在することを示せばよい．$V_\varepsilon = \{x \in O(n) : ||x - \mathbf{1}|| < \varepsilon\} \subset U$ となるような $\varepsilon > 0$ が存在する．開集合 V_ε の π による像

$$V_\varepsilon \boldsymbol{e}_1 = \{\boldsymbol{x} \in S^{n-1} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_1| < \varepsilon\}$$

は $\boldsymbol{e}_1$ を含む S^{n-1} の開集合で，$U\boldsymbol{e}_1$ に含まれるから，主張が示された． □

【解説】 閉線形群が C^∞ 級多様体の構造を持つことを 6.3 節 で見た．さらに，例題 6.9 の左辺に現れる等質空間 G/H には，G の作用が C^∞ 級であるような C^∞ 級多様体の構造が一意に定まり，例題 6.9 の同型は，C^∞ 級多様体としての同型であることが知られている．

例題 6.9 の解説にある多様体としての同型は，次のような一般的な形で成立する．証明については，[28, §6.3], [25], [40] 等を参照されたい．

定理 6.7
G をリー群，H を G の閉部分群とするとき，G/H 上には，写像

$$G \times (G/H) \to G/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH$$

が C^∞ 級であるような C^∞ 級多様体の構造が一意的に定まる．

6.5 単連結性

位相空間 X の 2 つの道で始点，終点がそれぞれ共通であるもの

$$p(t), q(t) : [0,1] \to X, \quad p(0) = q(0), \quad p(1) = q(1)$$

に対して，p から q への**変形**（または**ホモトピー**）とは連続関数 $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ であって，

$$F(0,t) = p(t), \quad F(1,t) = q(t), \quad F(s,0) = p(0), \quad F(s,1) = p(1)$$

が任意の $s, t \in [0,1]$ に対して成り立つものをいう．

位相空間 X が弧状連結であって，始点，終点がそれぞれ共通である任意の 2 つの道 p, q に対して p から q への変形が存在するとき，X は**単連結**であるという．

単連結性は連結性やコンパクト性と同じく位相不変量（互いに同相な位相空間が共有する性質）である．

演習問題 6.26

$\mathbb{R}^m$ の点 x から y への道は x, y を結ぶ線分に変形できることを示せ．(したがって，$\mathbb{R}^m$ は単連結であることがわかる．)

演習問題 6.27

立体射影（例題 5.14，演習問題 5.5）を用いて，S^n $(n \geq 2)$ は単連結であることを示せ．

演習問題 6.28

$SU(2)$ は S^3 と同相であり，したがって単連結であることを示せ．

例題 6.10

$SL(2, \mathbb{C})$ は単連結であることを示せ．

解答 演習問題 6.28 より $SU(2)$ は単連結である．演習問題 6.21 より

$$SL(2, \mathbb{C}) \simeq SU(2) \times \mathbb{R}^3$$

だから，$SL(2, \mathbb{C})$ は単連結であることがわかる． □

$\mathbb{T} \simeq S^1$ は単連結でない．証明する代わりに，この事実の直観的な説明を与える．k を正の整数とする．$p(t) = (\cos 2k\pi t, \sin 2k\pi t)$ は $p(0) = p(1) = 1$ を満たす S^1 内の曲線で，単位円周に反時計回りに k 回巻きついている．一方 1 点 $q(t) \equiv 1$ は $p(t)$ と同じ始点と終点を持つ曲線である．$p(t)$ から $q(t)$ に S^1 内で連続的に変形することができないことは直観的には明らかであろう．

演習問題 6.29

ユークリッド空間の次の部分集合は単連結か？

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}$.

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

(3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

例題 6.11

加法群 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{T}$ について次を示せ．

(1) $\mathbb{R}$ は閉線形群と見なせる．

(2) $f(t) = e^{it}$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{T}$ の上への準同型写像で，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{T}$ の局所同相を与える．

(3) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{T}$ のリー環は同型である．

解答 (1) $x \in \mathbb{R}$ に対して行列 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を対応させればよい．

(2) 上への準同型写像であることは明らか．$\mathrm{Ker}\, f = 2\pi\mathbb{Z}$ であり，長さが 2π より小さい $\mathbb{R}$ の区間への f の制限は同相写像を与える．

(3) いずれのリー環も $\mathbb{R}$ に同型である． □

【解説】 $\mathbb{R}$ は単連結な可換群で，その離散部分群 $2\pi\mathbb{Z}$ による剰余群と $\mathbb{T}$ が同相になっている．リー環は単位元の近傍で決まるから，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{T}$ のリー環は同じである．

$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は全射準同型写像であり（例題 5.9），$SU(2)/\{\pm\mathbf{1}\} \simeq SO(3)$ である（演習問題 6.24）．例題 6.11 と同じくリー環の同型 $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ が成立する．（このことは例題 5.8 でも見た．）

これらの例は，より一般的な状況に一般化される．連結リー群 G に対して，単連結な位相群（群かつ位相空間であって群演算が連続なもの）$\tilde{G}$ と局所同相な上への準同型写像 $f : \tilde{G} \to G$ が（本質的に）一意に存在する．$\mathrm{Ker}\, f$ は $\tilde{G}$ の離散部分群になる．すなわち，$\tilde{G}$ の単位元のある近傍が存在して，その中に含まれる $\mathrm{Ker}\, f$ の元は単位元に限る．$\tilde{G}$ はリー群になり，被覆写像は C^∞ 級である．したがって，$\mathrm{Ker}\, f$ のリー環（単位元における接ベクトル空間）は $\{0\}$ である．$\mathrm{Ker}\, f$ を G の**基本群**と呼ぶ．$\tilde{G}$ と G のリー環（単位元における接ベクトル空間）は同型であるが，$\mathrm{Ker}\, f$ が自明でないときは，G は単連結でない．$\tilde{G}$ を G の**普遍被覆群**と呼ぶ．普遍被覆群はリー環に対して一意的に決まるが，同じリー環を持つ連結群は離散部分群の分だけ不定性がある．

上の例では，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{T}$ の普遍被覆群，$SU(2)$ は $SO(3)$ の普遍被覆群になっている．

$SO(2) \simeq \mathbb{T}$ の普遍被覆群は $\mathbb{R}$，基本群は $\mathbb{Z}$ であり，$SO(3)$ の普遍被覆群は $SU(2)$，基本群は $\{\pm\mathbf{1}\}$ である．$n \geq 3$ に対して，$SO(n)$ の普遍被覆群 $Spin(n)$ が構成され，被覆写像 $f : Spin(n) \to SO(n)$ は 2 対 1 の写像で，$SO(n)$ の基本群は $\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathbb{Z}_2$ である．$Spin(n)$ は**スピノル群**と呼ばれる．一般に $Spin(n)$ は閉線形群ではないが，$\mathfrak{so}(n)$ をリー環に持つリー群である．（[28, §7.2], [41, 第 4 章 8 節] 参照．）

例題 6.4 の解説で述べたように，$SL(2,\mathbb{R})$ は $SO(2) \times D$（D は単位円板）と同相であるから，$SL(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆群 $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ は $\mathbb{R} \times D$ と同相である．

演習問題 6.28 より，$Sp(1) \simeq SU(2)$ は単連結である．一般に次が成り立つ．

定理 6.8

正の整数 n に対して，$SU(n)$, $Sp(n)$ は単連結である．

[証明] G が連結な閉線形群，H が連結かつ単連結な G の閉部分群，等質空間 G/H が単連結であるとき，G は単連結になることが知られている．この事実の証明は本書では与えない（[28, 定理 6.35], [41, 4 §7] を参照）．

定理 6.8 は，例題 6.9 の同相，$SU(n)$, $Sp(n)$ の連結性（演習問題 6.18，命題 10.9），$S^m\ (m \geq 2)$ の単連結性より，上の事実と数学的帰納法により証明される． □

第 7 章
閉線形群の間の準同型写像

第 4 章で閉線形群のリー環を定義して例を扱った．この章では，さらに閉線形群とリー環の対応について調べる．G, H が閉線形群で，G が単連結であるとき，G, H のリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の間の準同型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が，閉線形群の間の準同型写像 $\Phi : G \to H$ に持ち上がることを，ディンキンによるキャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式の具体形を用いて証明する．

7.1 ディンキンの公式

例題 3.21 では，$e^Z = e^X e^Y$ となる Z を X, Y の 3 次の項まで展開して，2 次と 3 次の項が X, Y のカッコ積を用いて表されることを見た．実は高次の展開項も X, Y のカッコ積で表される．

準備として exp の微分について調べる．

演習問題 7.1

$X, Y \in M(n, \mathbb{K})$ が $[X, Y] = 0$ を満たすとき，次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dt} \exp(X + tY)\bigg|_{t=0} = \exp(X)\, Y.$$

上の演習問題のように指数写像の微分は，可換な場合にはスカラー値の場合と同じく簡単だが，一般の場合は次で与えられる．

定理 7.1

$\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in M(n, \mathbb{K})$ を滑らかな曲線とするとき，次が成り立つ．

$$\frac{d}{dt} \exp X(t) = \exp X(t) \frac{\mathbf{1} - \exp(-\operatorname{ad} X(t))}{\operatorname{ad} X(t)} \frac{dX(t)}{dt}.$$

ただし右辺の分数は任意の $X \in M(n, \mathbb{K})$ に対して収束する無限級数

$$\frac{\mathbf{1} - \exp(-\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\operatorname{ad} X)^n$$

により定義する．

[証明]

$$Y(s,t) = \exp(-sX(t))\frac{\partial}{\partial t}\exp(sX(t))$$

とおく．以下 $Y(s,t)$, $X(t)$ をそれぞれ Y, X と記す．$Y(s,t)$ を s で偏微分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial s} &= \exp(-sX)(-X)\frac{\partial}{\partial t}\exp(sX) + \exp(-sX)\frac{\partial}{\partial t}(X\exp(sX)) \\
&= \exp(-sX)(-X)\frac{\partial}{\partial t}\exp(sX) + \exp(-sX)\left(\frac{dX}{dt}\exp(sX) + X\frac{\partial}{\partial t}\exp(sX)\right) \\
&= \exp(-sX)\frac{dX}{dt}\exp(sX) \\
&= \exp(-s\,\mathrm{ad}\,X)\frac{dX}{dt}.
\end{aligned}$$

区間 $[0,1]$ で s について積分すると，左辺は

$$\int_0^1 \frac{\partial Y}{\partial s}\,ds = Y(1,t) - Y(0,t) = \exp(-X)\,\frac{d}{dt}\exp X,$$

右辺は

$$\int_0^1 \exp(-s\,\mathrm{ad}\,X)\,\frac{dX}{dt}\,ds = \frac{\mathbf{1} - \exp(-\mathrm{ad}\,X)}{\mathrm{ad}\,X}\,\frac{dX}{dt}$$

である．以上で定理が証明された． □

【解説】 上の定理で特に $X(t)$ として直線 $X + tY$ $(X, Y \in M(n,\mathbb{K}),\ t \in \mathbb{R})$ をとると，

$$\frac{d}{dt}\exp(X + tY)\Big|_{t=0} = \exp(X)\,\frac{\mathbf{1} - \exp(-\mathrm{ad}\,X)}{\mathrm{ad}\,X}\,Y$$

がわかる．これは，exp の $X \in M(n,\mathbb{K})$ における微分

$$d\exp_X \ :\ M(n,\mathbb{K}) \ \to\ M(n,\mathbb{K})$$

が

$$d\exp_X = \exp X\,\frac{\mathbf{1} - \exp(-\mathrm{ad}\,X)}{\mathrm{ad}\,X}$$

で与えられることを示している．

この線形変換が可逆ならば，逆写像定理より，exp は局所微分同相写像を与えることがわかる．上式より $d\exp_X$ が可逆かどうかは $\mathrm{ad}\,X$ を調べることによりわかる．少なくとも $X = 0$ の近傍で $d\exp_X$ は可逆だから，exp は 0 の近傍で局所微分同相写像を与えることがわかる．本書では上の定理や逆写像定理を使わずに，exp の逆写像 log を調べることにより，このことを既に示した．

例題 7.1

0 に十分近い $X, Y \in M(n,\mathbb{K})$ に対して，$Z(t) = \log(\exp(tX)\,\exp(tY))$ $(0 \le t \le 1)$ により $M(n,\mathbb{K})$ 内の曲線を定めるとき，

$$Z'(t) = \frac{\mathrm{ad}\,Z(t)}{\exp(\mathrm{ad}\,Z(t)) - \mathbf{1}}(X + \mathrm{Ad}\,(\exp Z(t))Y)$$

を示せ．また，

$$\frac{\operatorname{ad} Z(t)}{\exp(\operatorname{ad} Z(t)) - \mathbf{1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\exp(\operatorname{ad} Z(t)) - \mathbf{1})^{k-1}$$

を示せ．

解答 $\exp Z(t) = \exp(tX) \exp(tY)$ の両辺を t で微分すると，定理 7.1 より

$$\exp Z(t) \frac{1 - \exp(-\operatorname{ad} Z(t))}{\operatorname{ad} Z(t)} Z'(t) = X \exp Z(t) + (\exp Z(t)) Y.$$

したがって，$\exp(\operatorname{ad} Z) = \operatorname{Ad}(\exp Z)$ などを用いて，

$$\begin{aligned} Z'(t) &= \frac{\operatorname{ad} Z(t)}{1 - \exp(-\operatorname{ad} Z(t))} (\exp Z(t))^{-1} (X \exp Z(t) + (\exp Z(t)) Y) \\ &= \frac{\operatorname{ad} Z(t)}{\exp(\operatorname{ad} Z(t)) - 1} (X + \operatorname{Ad}(\exp Z(t)) Y) \end{aligned}$$

がわかる．$A = \operatorname{ad} Z(t)$ とおくと，

$$A = \log(\mathbf{1} + (\exp A - \mathbf{1})) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\exp A - \mathbf{1})^k$$

だから，

$$\frac{A}{\exp A - \mathbf{1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (\exp A - \mathbf{1})^{k-1}$$

がわかる． □

キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式の最初の数項を導いた計算（問題 3.21）を続ければ，$\exp Z = \exp X \exp Y$ となる Z の級数展開の高次の項を順番に計算することができるが，カッコ積を用いて表すのは困難である．ディンキンは一般の展開項をカッコ積を用いて表す明示公式を与えた．ディンキンの公式を与えるため，カッコ積の繰り返しを表す記号を用意しておく．$X_k, X_{k-1}, \ldots, X_1 \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，

$$\begin{aligned} [X_k, \ldots, X_2, X_1] &= (\operatorname{ad} X_k \circ \cdots \circ \operatorname{ad} X_3 \circ \operatorname{ad} X_2) X_1 \\ &= [X_k, \ldots, [X_3, [X_2, X_1]] \cdots] \end{aligned}$$

とおく．また $X, \ldots, X$（j 個の X の列）を $X^{(j)}$ で表す．

定理 7.2 (ディンキンの公式)
$X, Y \in M(n, \mathbb{C})$ が 0 に十分近いとき，$e^X e^Y = e^Z$ となる $Z \in M(n, \mathbb{K})$ がただ 1 つ存在して，

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum \frac{1}{i_1 + j_1 + \cdots + i_k + j_k} \frac{[X^{(i_1)}, Y^{(j_1)}, \cdots, X^{(i_k)}, Y^{(j_k)}]}{i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!}$$

で与えられる．ただし，2 つ目の Σ は $i_p + j_p \geq 1$ $(p = 1, \ldots, k)$ であるような $2k$ 個の非負整数 $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$ 全体をわたる和をとる．

【解説】 $Z = \log(e^X e^Y)$ の展開の各項はカッコ積を用いて表されている．(上の和の各項

は $j_k = 0, 1$ でなければ消えている.）ディンキンの公式もキャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式と呼ばれることがある.

[証明] Z が一意的に存在することは例題 3.18 より容易にわかる.

$$\begin{aligned}\exp \operatorname{ad} Z(t) &= \operatorname{Ad}(\exp Z(t)) = \operatorname{Ad}(\exp(tX)\exp(tY)) \\ &= \operatorname{Ad}(\exp tX)\operatorname{Ad}(\exp tY) = \exp(t \operatorname{ad} X)\exp(t\operatorname{ad} Y),\end{aligned}$$

および $\exp(t\operatorname{ad} Y)Y = Y$ が成り立つから，例題 7.1 より,

$$\begin{aligned}Z'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(\exp(t\operatorname{ad}X)\exp(t\operatorname{ad}Y) - \mathbf{1})^{k-1}(X + \exp(t\operatorname{ad}X)Y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum_{i+j\geq 1}\frac{t^{i+j}}{i!\,j!}(\operatorname{ad}X)^i(\operatorname{ad}Y)^j\right)^{k-1}\left(X + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}(\operatorname{ad}X)^i\right)Y\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left\{\sum \frac{t^{i_1+j_1+\cdots+i_{k-1}+j_{k-1}}}{i_1!j_1!\cdots i_{k-1}!j_{k-1}!}[X^{(i_1)}, Y^{(j_1)}, \ldots, X^{(i_{k-1})}, Y^{(j_{k-1})}, X]\right. \\ &\qquad \left. + \sum \frac{t^{i_1+j_1+\cdots+i_{k-1}+j_{k-1}+i_k}}{i_1!\,j_1!\cdots i_{k-1}!\,j_{k-1}!\,i_k!}[X^{(i_1)}, Y^{(j_1)}, \ldots, X^{(i_{k-1})}, Y^{(j_{k-1})}, X^{(i_k)}, Y]\right\}\end{aligned}$$

となる．ただし，2 番目の Σ は $i_r, j_r \geq 0$, $i_r + j_r \geq 1$ $(i = 1, \ldots, k-1)$，3 番目の Σ は $i_r, j_r \geq 0$, $i_r + j_r \geq 1$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $i_k \geq 0$ をわたる和をとる．$Z(0) = 0$ より

$$Z(t) = \int_0^1 Z'(t)dt$$

だから項別に積分して求める結果が得られる. □

演習問題 7.2

$X, X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ が対角成分がすべてゼロの上三角行列（すなわち $i \leq j$ ならば (i,j) 成分がゼロ）とする．このとき，$[X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1] = 0$ および, $\exp X$ は X の多項式であることを示せ.

例題 7.2

N は $GL(n, \mathbb{K})$ の連結な閉部分群で任意の $X \in L(N) = \mathfrak{n}$ に対して $i \geq j$ のとき $X_{ij} = 0$ が成り立つとする．このとき，$N = \exp \mathfrak{n}$ であることを示せ.

解答 演習問題 7.2 とディンキンの公式より $\exp X \exp Y = \exp Z$ は X, Y の多項式の間の恒等式である（ただし X と Y は可換とは限らない）．したがって，ディンキンの公式は，原点の近傍に限らず，すべての $X, Y \in \mathfrak{n}$ に対して成り立ち，$Z \in \mathfrak{n}$ である．したがって，$e^X e^Y \in \exp \mathfrak{n}$ である．定理 6.4 (ii) より任意の $x \in N$ は $e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ $(X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{n})$ の形で表されるから，$N \subset \exp \mathfrak{n}$，よって $N = \exp \mathfrak{n}$ が示された. □

【解説】 例題 7.2 において，N と $\mathfrak{n}$ を最大にとると次の閉線形群とリー環の対応を述べていることになる（これらの閉線形群とリー環については，演習問題 2.23，演習問題 4.20 (2) 参照）.

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{K}) \right\}, \quad \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \right\}.$$

7.2 準同型写像とその微分

定理 7.3

$\Phi : G \to H$ を閉線形群 G, H の間の連続な準同型写像とするとき，次の図式を可換にするようなリー環 $\mathfrak{g} = L(G)$, $\mathfrak{h} = L(H)$ の間の線形写像 $L(\Phi) = \varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が一意的に存在する．

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\ \Phi\ } & H \end{array}$$

すなわち，任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp\varphi(X) = \Phi(\exp X)$ が成り立つような線形写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が一意的に存在する．さらに次が成り立つ．

(i) Φ は滑らかである．

(ii) $\varphi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$ $({}^{\forall}g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$.

(iii) $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ $({}^{\forall}X,\ Y \in \mathfrak{g})$.

(iv) $\varphi(X) = \left.\dfrac{d}{dt}\Phi(\exp tX)\right|_{t=0}$.

(v) G が弧状連結で，$\Phi_i : G \to H$ $(i = 1,2)$ が滑らかな準同型写像とするとき，$\varphi_1 = \varphi_2$ ならば $\Phi_1 = \Phi_2$ である．

[証明] $X \in \mathfrak{g}$ に対して，仮定より $A(t) = \Phi(\exp tX)$ は $\mathbb{R}$ から H への連続な準同型写像だから，例題 3.20 より $\exp tZ = \Phi(\exp tX)$ となる行列 Z が一意的に存在する．$\exp tZ \in H$ より $Z \in \mathfrak{h}$ が従う．対応 $X \mapsto Z$ を φ と定めると，

$$\Phi(e^{tX}) = e^{t\,\varphi(X)},$$

$t = 1$ とすると，

$$\Phi(e^{X}) = e^{\varphi(X)}$$

が得られる．

$\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ ならば，$\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$ だから，$s \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\varphi(sX) = s\,\varphi(X)$ が成り立つ．例題 3.23 および Φ が連続な準同型写像であることを用いて，

$$\begin{aligned} e^{t\,\varphi(X+Y)} &= \Phi(e^{t(X+Y)}) = \lim_{m\to\infty} \Phi\left(\left(e^{\frac{tX}{m}} e^{\frac{tY}{m}}\right)^m\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\Phi(e^{\frac{tX}{m}})\Phi(e^{\frac{tY}{m}})\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{t\,\varphi(X)}{m}} e^{\frac{t\,\varphi(Y)}{m}}\right)^m = e^{t(\varphi(X)+\varphi(Y))}, \end{aligned}$$

よって $\varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)$ がわかる．したがって φ は線形写像である．

(i) $g\in G$ の近傍の $x\in G$ は $x=g\exp X$ $(X\in\mathfrak{g})$ の形で書ける．

$$\Phi(x)=\Phi(g\exp X)=\Phi(g)\exp\varphi(X)$$

において，X を g の近くでの座標として，この式は，線形写像 φ と指数写像，左からの $\Phi(g)$ のかけ算，とすべて無限回微分可能な写像の合成だから，無限回微分可能である．

(ii) 例題 4.3 (1) より $gXg^{-1}\in\mathfrak{g}$ であることに注意する．行列の指数関数の性質より

$$\exp t\,\varphi(gXg^{-1})=\Phi(\exp(t\,gXg^{-1}))=\Phi(g\,e^{tX}g^{-1})=\Phi(g)e^{t\,\varphi(X)}\Phi(g)^{-1}.$$

$t=0$ で微分すると $\varphi(gXg^{-1})=\Phi(g)\varphi(X)\Phi(g)^{-1}$.

(iii) 例題 4.3 の解答より，

$$[X,Y]=\left.\frac{d}{dt}\,e^{tX}Ye^{-tX}\right|_{t=0}$$

だから，(ii) より

$$\begin{aligned}\varphi([X,Y])=\varphi\left(\left.\frac{d}{dt}\,e^{tX}Ye^{-tX}\right|_{t=0}\right)&=\left.\frac{d}{dt}\,\varphi(e^{tX}Ye^{-tX})\right|_{t=0}\\&=\left.\frac{d}{dt}\,e^{t\,\varphi(X)}\varphi(Y)e^{-t\,\varphi(X)}\right|_{t=0}\\&=[\varphi(X),\varphi(Y)].\end{aligned}$$

(iv) $\exp\varphi(tX)=\Phi(\exp tX)$ を $t=0$ で微分して得られる．

(v) Φ_1 と Φ_2 は $\exp\mathfrak{g}$ 上で一致するが，定理 6.4 より G は $\exp\mathfrak{g}$ で生成され，Φ_i は準同型写像であることから主張が従う． □

【解説】 連続準同型写像 $\Phi:G\to H$ から定まる $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ を $L(\Phi)$ と書く．すなわち $L(\Phi)=\varphi$.

閉線形群の間の準同型写像 $\Phi:G\to H$ は，連続性を仮定すれば自動的に滑らかな写像になる．これは閉線形群，あるいはさらに一般にリー群の著しい性質である．

(iii) は $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ がリー環の準同型写像であることを述べている．

(iv) は，Φ の $\mathbf{1}$ における**微分**が $d\Phi_{\mathbf{1}}=\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ であることを示している．$A(t)$ を $A(0)=\mathbf{1}$, $A'(0)=X$ を満たす G 内の滑らかな曲線とするとき，合成関数の微分の公式により，

$$\varphi(X)=\left.\frac{d}{dt}\Phi(A(t))\right|_{t=0} \tag{7.1}$$

である．あらかじめ Φ が微分可能であることを仮定すれば，この式を用いて φ がリー環の準同型写像であることを示すことも容易である．

定理 7.3 は，閉線形群の間の連続準同型写像は微分可能で，微分はリー環の間の準同型写像になることを示している．

演習問題 7.3

$\Phi:G\to H$ が閉線形群の間の滑らかな準同型写像であるとき，(7.1) を用いて φ が $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}$ へのリー環の準同型写像であることを示せ．

演習問題 7.4

$\Phi : G \to G'$ が閉線形群の同型写像，すなわち，同相写像かつ準同型写像であるとき，$\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ はリー環の同型写像であることを示せ．

演習問題 7.5

$\det : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$ は閉線形群の間の準同型写像であることを確かめ，その微分として得られるリー環の準同型写像を求めよ．

> **例題 7.3**
>
> G, H を閉線形群，$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞれ G, H のリー環，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ をリー環の準同型写像とする．$\Phi(\exp X) = \exp \varphi(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ と定めるとき，十分 0 に近い $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して
>
> $$\Phi(e^X e^Y) = \Phi(e^X)\,\Phi(e^Y)$$
>
> が成り立つことを示せ．

解答 0 に十分近い $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$e^Z = e^X e^Y$ となる $Z \in \mathfrak{g}$ を考えると，キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式（例題 3.21，定理 7.2）より，

$$\begin{aligned}
\Phi(e^X e^Y) &= \Phi(e^Z) = e^{\varphi(Z)} \\
&= \exp \varphi \left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \cdots \right) \\
&= \exp \left(\varphi(X) + \varphi(Y) + \frac{1}{2}[\varphi(X), \varphi(Y)] + \cdots \right) \\
&= e^{\varphi(X)} e^{\varphi(Y)} \\
&= \Phi(e^X)\Phi(e^Y)
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

閉線形群の間の連続準同型写像の微分はリー環の間の準同型写像を引き起こすが，逆にリー環の間の準同型写像は閉線形群の間の連続準同型写像に持ち上がるかどうかを考える．指数関数とキャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式（定理 7.2）により，リー環の間の準同型写像は局所的には閉線形群に持ち上げることができるが，弧状連結な閉線形群の上で大域的にうまく定義されるためには，単連結性を仮定する必要がある．

定理 7.4

G, H は閉線形群，$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ はそれぞれ G, H のリー環，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ をリー環の準同型写像とする．G が単連結ならば，$L(\Phi) = \varphi$ となる滑らかな準同型写像 $\Phi : G \to H$ がただ 1 つ存在する．

[証明] $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\Phi(\exp X) = \exp \varphi(X)$ と定める．例題 7.3 より Φ は G における $\mathbf{1}$ のある開近傍 V 上の準同型写像であり，指数写像の解析性より，$\mathbf{1}$ のある開近傍 V 上で Φ は滑らかな準同型写像を与える．

上で作った局所準同型写像 Φ を定理 6.4 の証明の考え方を用いて曲線に沿って G 全体に延ばす．任意の $A \in G$ に対して，$\mathbf{1}$ から A への道 $A(t)$ をとり，$[0,1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ を各 $1 \leq i \leq m$ に対して

$$t_{i-1} \leq t \leq s \leq t_i \implies A(t)^{-1}A(s) \in V \tag{7.2}$$

となるようにとる（定理 6.4 の証明を参照）．$A_i = A(t_i)$ とおく．各 $1 \leq i \leq m$ に対して $A_{i-1}^{-1}A_i \in V$ より $\Phi(A_{i-1}^{-1}A_i)$ は定義される．$A = A_0A_0^{-1}A_1 \cdots A_{m-1}^{-1}A_m$ より，$\Phi(A)$ を

$$\Phi(A) = \Phi(A_0)\,\Phi(A_0^{-1}A_1)\cdots\Phi(A_{m-1}^{-1}A_m) \tag{7.3}$$

により定義する．$\Phi(A)$ が $\mathbf{1}$ と A を結ぶ道 $A(t)$ のとり方と $[0,1]$ の分割のとり方によらず定義されることを示さなければならない．

<u>分割のとり方によらないこと</u>

$\mathbf{1}$ と A を結ぶ道 $A(t)$ が与えられたとき，上で定義した $\Phi(A)$ が $[0,1]$ の分割のとり方によらないことを示す．ある i に対して $t_{i-1} < s < t_i$ である分点 s を付け加えた分割 $0 = t_0 < \cdots < t_{i-1} < s < t_i < \cdots < t_m = 1$ を用いて $\Phi(A)$ を計算すると，(7.3) において $\Phi(A_{i-1}^{-1}A_i)$ の部分を $\Phi(A_{i-1}^{-1}A(s))\Phi(A(s)^{-1}A_i)$ で置き換えた形になる．ところが，$A_{i-1}^{-1}A(s)$, $A(s)^{-1}A_i \in V$ だから，Φ の局所準同型性より

$$\Phi(A_{i-1}^{-1}A(s))\Phi(A(s)^{-1}A_i) = \Phi(A_{i-1}^{-1}A(s)A(s)^{-1}A_i) = \Phi(A_{i-1}^{-1}A_i).$$

したがって，1 点を付け加えた分割を用いて計算しても $\Phi(A)$ の値は変わらない．同様にして，もとの分割に有限個の分点を付け加えた分割（もとの分割の細分）を用いても $\Phi(A)$ の値は同じである．

仮定 (7.2) を満たす 2 つの分割に対して，その分点をすべて合わせて得られる細分は仮定を満たし，最初の 2 つの分割を用いて計算した $\Phi(A)$ の値は共通の細分に対する $\Phi(A)$ の値に等しい．したがって，$\Phi(A)$ は $[0,1]$ の分割のとり方によらない．

<u>道のとり方によらないこと</u>

$p(t), q(t)$ を $\mathbf{1}$ から A への道，$F(s,t)$ を $p(t)$ から $q(t)$ へのホモトピーとする．$[0,1]$ を m 等分して正方形 $[0,1] \times [0,1]$ を m^2 個の正方形に分割する．連続性とコンパクト性より，m を十分大きくとれば，各小正方形 $[(k-1)/m, k/m] \times [(l-1)/m, l/m]$ $(1 \leq k, l \leq m)$ の任意の 2 点 (s,t), (s',t') に対して，

$$F(s,t)^{-1}F(s',t') \in V$$

が成り立つ．$s = 0$ から $s = 1$ まで道を変形したいのだが，変形を少しずつ行っていく．$A_i = p(i/m) = F(0, i/m)$, $B_i = F(1/m, i/m)$ $(0 \leq i \leq m)$ とおく．$A_0 = B_0 = \mathbf{1}$, $A_m = B_m = A$ である．各 $1 \leq i \leq N$ に対して，

$$\begin{aligned}\Phi(A_{i-1}^{-1}A_i) &= \Phi(A_{i-1}^{-1}B_{i-1}B_{i-1}^{-1}B_iB_i^{-1}A_i)\\ &= \Phi(A_{i-1}^{-1}B_{i-1})\Phi(B_{i-1}^{-1}B_i)\Phi(B_i^{-1}A_i)\end{aligned}$$

であり，(7.3) の各 $\Phi(A_{i-1}^{-1}A_i)$ を上式の右辺で置き換えると，

$$\Phi(A) = \Phi(B_0)\Phi(B_0^{-1}B_1)\cdots\Phi(B_{m-1}^{-1}B_m)$$

となる．これは道 $F(1/m,t)$ を用いて $\Phi(A)$ を計算しても $p(t) = F(0,t)$ を用いた値と等しいことを示している．同様に順次続けていけば，道 p と q とで同じ $\Phi(A)$ の値が定義されることがわかる．

上のように定義された Φ が $L(\Phi) = \varphi$ を満たす一意的な準同型写像 $\Phi : G \to H$ であることは容易に示される（演習問題 7.6）． □

系 7.5

G, H は単連結な閉線形群で，リー環 $L(G)$ と $L(H)$ が同型ならば，G と H は同型である．

演習問題 7.6

定理 7.4 の証明において，局所準同型 Φ から定義された Φ が $L(\Phi) = \varphi$ を満たす一意的な準同型写像 $\Phi : G \to H$ であることを示せ．

演習問題 7.7

系 7.5 を示せ．

演習問題 7.8

G, H は閉線形群，G は連結とする．$\Phi : G \to H$ が連続な準同型写像であるとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $L(\Phi) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が全射ならば，Φ は H_0（H の単位行列の連結成分）の上への写像である．

(2) $L(\Phi)$ が単射ならば，Φ は G の単位行列の近傍で単射である．

7.3 表現

閉線形群（あるいはリー環）の間の準同型写像の重要な例は，H が一般線形群（あるいは一般線形リー環）の場合である．

V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V のある基底に関する表現行列を考えることにより，$GL(V)$ は $GL(n,\mathbb{C})$ と自然に同一視される（$\dim V = n$）．

定義 7.1

閉線形群 G から $GL(V)$ への連続準同型写像 $\Pi : G \to GL(V)$ を G の V 上の**表現**と呼ぶ．

リー環 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型写像 $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{g}$ の V 上の**表現**と呼ぶ．つまり，π は複素線形写像であって，

$$\pi([X,Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たすとき，(π, V) を $\mathfrak{g}$ の V 上の表現という．

ベクトル空間 V を**表現空間**という．また $n = \dim V$ を表現 Π または π の**次元**と呼ぶ．本書では有限次元表現だけを扱うが，無限次元表現の概念も定義される．

閉線形群 G の有限次元ベクトル空間 V 上の表現 Π に対して，定理 7.3 より，$L(\Pi) = \pi$，すなわち $\Pi(\exp X) = \exp \pi(X)$ $(X \in \mathfrak{g})$ が成り立つような $\mathfrak{g} = L(G)$ の V 上の表現が定まる．π を Π の**微分表現**と呼ぶ．

定理 6.4，定理 7.3，定理 7.4 より次が得られる．これにより，リー環の表現を調べることにより閉線形群の表現に関する結果を得るという手法をとることが可能になる（第 8 章，第 9 章参照）．

系 7.6

(1) 連結な閉線形群の有限次元表現に対してその微分表現を対応させる写像 $\Pi \mapsto L(\Pi) = \pi$ は単射である．

(2) 単連結な閉線形群の有限次元表現に対してその微分表現を対応させる写像 $\Pi \mapsto L(\Pi) = \pi$ は全単射である．すなわち，G のリー環 $L(G) = \mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現に対して，それを微分表現に持つような G の表現が一意的に存在する．

例 7.1

表現の例をいくつか挙げる．

(1) $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ を閉線形群とすると，包含写像 $G \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ は G の $\mathbb{C}^n$ 上の表現を与える．これを G の**自然表現**と呼ぶ．

(2) $e^t \mapsto e^{it}$ は $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ の 1 次元表現である．
整数 n に対して，$z \mapsto z^n$ は $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の 1 次元表現である．

演習問題 7.9

上の例の各表現の微分表現を求めよ．

定義 7.2

閉線形群 G に対して，$g \in G$ による共役 $c_g : x \mapsto gxg^{-1}$ の微分を $d\,c_g = \mathrm{Ad}(g)$ とおき，$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の $\mathfrak{g}$ 上の**随伴表現**と呼ぶ．$\mathrm{ad} = L(\mathrm{Ad}) : \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**と呼ぶ．

例題 4.3 の解答より，

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in G,\, X \in \mathfrak{g}),$$
$$(\mathrm{ad}\,X)Y = [X, Y] \quad (X,\, Y \in \mathfrak{g})$$

である．例題 3.13 より，$g \in G,\, X \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$g(\exp X)g^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(g)X$$

である．また，定理 7.3 より，

$$\mathrm{Ad}(e^X) = e^{\mathrm{ad}\,X}$$

である．

例題 7.4
G を閉線形群，$g \in G$ とするとき，$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ $(X \in \mathfrak{g})$ は連続準同型写像 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を定めることを示せ．

解答 $g_1, g_2 \in G$ に対して，

$$\mathrm{Ad}(g_1g_2)X = (g_1g_2)X(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2Xg_2^{-1})g_1^{-1} = \mathrm{Ad}(g_1)(\mathrm{Ad}(g_2)X)$$

より $\mathrm{Ad}(g_1g_2) = \mathrm{Ad}(g_1)\mathrm{Ad}(g_2)$ である．したがって $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ は準同型写像である．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$g \mapsto gX, g \mapsto Xg, g \mapsto g^{-1}$ $(g \in G)$ は連続写像だから Ad は連続である． □

例題 7.5
任意の $g \in G,\ X,\ Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y] = \mathrm{Ad}(g)[X, Y]$$

が成り立つことを示せ．

解答 【**解 1**】 $c_g : x \mapsto gxg^{-1}$ は G から G への連続準同型写像であるから，定理 7.3 より $dc_g = \mathrm{Ad}(g)$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への準同型写像である．これが示したいことである．
【**解 2**】 $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ を用いて直接示すこともできる．

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ad}(g)X,\ \mathrm{Ad}(g)Y] &= [gXg^{-1},\ gYg^{-1}]\\ &= gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1}\\ &= g(XY - YX)g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)[X, Y].\end{aligned}$$

□

例題 7.6
$\mathrm{ad}\,[X, Y] = [\mathrm{ad}\,X,\ \mathrm{ad}\,Y]$ $(X,\ Y \in \mathfrak{g})$ を示せ．

解答 $\mathfrak{g}$ が閉線形群 G のリー環のとき，$L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ および定理 7.3 (iii) より題意が従う．$\mathrm{ad}\,X(Y) = [X, Y]$ を用いて直接，あるいはヤコビ恒等式を経由して示すこともできる．ヤコビ恒等式（例題 4.4）は

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$$

と書き換えることができる．これは $\mathrm{ad}\,[X, Y] = [\mathrm{ad}\,X,\ \mathrm{ad}\,Y]$ を意味する． □

定義 7.3
リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ_V, V) と (ρ_W, W) の**直和** $(\rho_V \oplus \rho_W,\ V \oplus W)$ を

$$\begin{aligned}\rho_V \oplus \rho_W \ &: \ \mathfrak{g} \ \to \ \mathfrak{gl}(V \oplus W),\\ X \ &\mapsto \ \begin{pmatrix}\rho_V(X) & 0\\ 0 & \rho_W(X)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

により定義する．

閉線形群 G の 2 つの表現の直和も同様に定義される．直和表現の微分表現は，G の表現の微分表現の直和に一致する．

7.4 被覆群の例

第 5 章において，$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ が全射であることを見たが，演習問題 7.8 を用いてこのことを示すこともできる．例題 5.8 より，$L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ は同型写像である．定理 7.3 より，$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は単位行列の近傍の間の同相写像を与える．$SU(2), SO(3)$ は連結だから，演習問題 7.8 より，$\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は全射である．

リー環の間の準同型写像のほうが概して調べやすいので，この方法は有用である．

例題 7.7

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{X \in M(2,\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}\, X = 0\}$ の元を

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \quad (x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R})$$

と書き，$\mathrm{Ad}(g)$ $(g \in SL(2,\mathbb{R}))$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ の線形変換と見なすとき，

$$\mathrm{Ad}(SL(2,\mathbb{R})) = SO_0(2,1), \quad \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = \{\pm\mathbf{1}\}$$

となることを示せ．ここで $SO_0(2,1)$ は $SO(2,1)$ の単位行列を含む連結成分を表す．

解答 $SO(n,1)$ は定義 2.8 で，$\mathfrak{so}(n,1) = \mathfrak{o}(n,1)$ は演習問題 4.4 で扱った．$\det X = -(x_1^2+x_2^2-x_3^2)$ および $\det \mathrm{Ad}(g)X = \det gXg^{-1} = \det X$ $(g \in SL(2,\mathbb{R}),\, X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ より，Ad は $SL(2,\mathbb{R})$ から $O(2,1)$ への連続準同型写像である．したがって，準同型写像 $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{o}(2,1)$ が得られる．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の交換関係から $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \{0\}$ だから，ad は単射である．また，$\mathfrak{o}(2,1)$ の次元は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ と同じく 3 だから，$\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{o}(2,1)$ は同型写像である．定理 7.3 より，$\mathrm{Ad} : SL(2,\mathbb{R}) \to SO_0(2,1)$ は単位行列の近傍の間の同相写像を与える．例題 6.5 より $SL(2,\mathbb{R})$ は連結，$SO_0(2,1)$ は定義より連結だから，演習問題 7.8 より，$\mathrm{Ad} : SL(2,\mathbb{R}) \to SO_0(2,1)$ は全射である．

任意の $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ に対して $gXg^{-1} = X$，すなわち $gX = Xg$ を満たす $g \in SL(2,\mathbb{R})$ が，$g = \pm\mathbf{1}$ に限ることは容易に確かめられる． □

演習問題 7.10

2 次のエルミート行列の空間

$$\left\{ X = \begin{pmatrix} x_4 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_4 - x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^4$$

への $SL(2,\mathbb{C})$ の作用を $p(g)X = gXg^*$ $(g \in SL(2,\mathbb{C}))$ により定めるとき，p は $SL(2,\mathbb{C})$ から $SO_0(3,1)$ の上への準同型写像で，$\mathrm{Ker}\, p = \{\pm\mathbf{1}\}$ であることを示せ．

ここで $SO_0(3,1)$ は $SO(3,1)$ の単位行列を含む連結成分を表す．

演習問題 7.11

$SL(2,\mathbb{R})$ の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ への随伴作用（例題 7.7）の軌道は，

$$
\begin{aligned}
O_c &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = c\} \quad (c < 0) && \text{一葉双曲面,} \\
O_c^{\pm} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = c,\ \pm x_3 > 0\} \quad (c > 0) && \text{二葉双曲面の片側,} \\
O_0^{\pm} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,\ \pm x_3 > 0\} && \text{円錐の片側,} \\
&\{0\} && \text{原点}
\end{aligned}
$$

で尽くされることを示せ．またそれぞれの軌道について $SL(2,\mathbb{R})$ の等方部分群を求めよ．

7.5 リーの対応

G, H を閉線形群，$\Phi : G \to H$ を連続準同型写像とすると，定理 7.3 より，

$$\Phi(e^X) = e^{\varphi(X)} \quad (X \in \mathfrak{g})$$

を満たすリー環の準同型写像 $L(\Phi) = \varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が一意的に存在する．このとき，$\Phi(G)$ は H の部分群，$\varphi(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{h}$ の部分リー環であるが，$\Phi(G)$ は閉集合とは限らず，これまで扱ってきた閉線形群の枠組からはみ出してしまう．

たとえば，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\Phi : \mathbb{R} \to (e^{it}, e^{\alpha it}) \in \mathbb{T}^2$ を考えると，例題 6.3 で見たように $\mathbb{T}^2$ の部分群

$$\{\mathrm{diag}(e^{it}, e^{\alpha it}) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$$

は，α が有理数のとき閉線形群であり，α が無理数のときは閉線形群でない．いずれの場合もこれは $\mathrm{diag}(i, \alpha i)$ が生成する 1 パラメーター群であり，α が無理数のときも $\{\mathrm{diag}(it, \alpha it) : t \in \mathbb{R}\}$ をリー環に持つと見なして差し支えないと思われる．

このように線形群（行列のなす群）とリー環の対応 $G \mapsto L(G)$ を考える際，線形群が閉であるというのは強すぎる制限になっている．本節では，線形群が閉であるという仮定を置かず，連結性を仮定すると，連結線形群とリー環が 1 対 1 に対応していることを概説する（リーの対応）．

閉とは限らない $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群を**線形群**（または行列群）と呼ぶ．次の事実が知られている（[29] §4.1 Example 2 を参照）．

定理 7.7

線形群はリー群である．

定義 4.1 と同じく，線形群 G の $\mathbf{1}$ における接ベクトル空間を G のリー環 $L(G) = \mathfrak{g}$ と定める．$L(G) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ は部分リー環になる．$L(G)$ は指数写像を用いて，

$$L(G) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : \exp tX \in G\ ({}^{\forall} t \in \mathbb{R})\} \tag{7.4}$$

と表すことができる.（これは G が閉線形群の場合は，定理 4.1 で示した．一般の線形群の場合の定義 4.1 と (7.4) の同値性の証明は，[29, §2.2 Theorem 3] を参照．あるいは，(7.4) を $L(G)$ の定義として，$L(G) \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ が部分リー環になることは別途示す道筋もある（[28, 定理 5.23]））．また，線形群の連結性に関する定理 6.4 は，閉であるという仮定を外しても成立する.（証明において閉であるという条件を本質的に用いていないことに注意されたい.）

実線形リー環 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対して，$G = \Gamma(\mathfrak{g})$ を $\exp \mathfrak{g}$ により生成される $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群とする．すなわち，

$$\Gamma(\mathfrak{g}) = \{e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_k} \,:\, X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}\}.$$

$\Gamma(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ をリー環とする $GL(n,\mathbb{C})$ の**解析的部分群**と呼ぶ.

演習問題 7.12

$\Gamma(\mathfrak{g})$ は弧状連結であることを示せ.

線形群とそのリー環の対応について次が成り立つ.

定理 7.8 (リーの対応)

対応 $G \mapsto L(G)$ と逆対応 $\mathfrak{g} \mapsto \Gamma(\mathfrak{g})$ により，連結線形群の全体と線形リー環の全体は 1 対 1 に対応する.

$G = \Gamma(L(G))$ は容易である．$\mathfrak{g} = L(\Gamma(\mathfrak{g}))$ は，キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式（例題 3.21, 定理 7.2）とベールの定理を用いて証明される.（定理 4.2 の後の記述を参照．詳細は [29, §2.5 Theorem 1] に譲る.）

第 8 章
$SU(2)$ と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現

この章では，閉線形群 $SU(2)$，そのリー環 $\mathfrak{su}(2)$，その複素化 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現を（同値を除いて）すべて求める．また $SU(2)/\{\pm\mathbf{1}\} \simeq SO(3)$ を用いて，$SO(3)$ の既約有限次元表現を分類する．

8.1 $SU(2)$ の表現とその微分

2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の既約な有限次元表現を具体的に与える．(Π, V) が $SU(2)$ の有限次元表現であるとは，V は有限次元複素ベクトル空間で，任意の $g \in SU(2)$ に対して V の線形変換 $\Pi(g)$ が定義されていて，$\Pi : SU(2) \to GL(V)$ は連続であり，Π は準同型写像，つまり $\Pi(g_1g_2) = \Pi(g_1)\Pi(g_2)$ $({}^\forall g_1, g_2 \in SU(2))$ が成り立つことをいう（定義 7.1）．

2 次特殊ユニタリ群

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha,\, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

の元 g は，$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に線形変換 $\boldsymbol{z} \mapsto g\boldsymbol{z}$ で作用する（$SU(2)$ の**自然表現**）．

n を 0 以上の整数とし，複素数を係数とする z_1, z_2 の n 次斉次多項式全体の集合を V_n とする．つまり，$V_0 = \mathbb{C}$ であり，$n \geq 1$ に対して V_n の元は，

$$f(\boldsymbol{z}) = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_2 + \cdots + a_n z_2^n \quad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$$

の形をしている．V_n は $n+1$ 次元の複素ベクトル空間をなす．

$g \in SU(2), f \in V_n$ に対して，$\Pi_n(g)$ を

$$[\Pi_n(g)f](\boldsymbol{z}) = f(g^{-1}\boldsymbol{z})$$

により定義すると，Π_n は $SU(2)$ の表現を定める．

例題 8.1
(Π_n, V_n) は $SU(2)$ の表現であることを示せ．

解答 $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ とおくと，$g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$ であり，上の $f(\boldsymbol{z}) \in V_n$ の一般形に対して，

$$[\Pi_n(g)f](\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\bar{\alpha}z_1 - \beta z_2)^{n-k}(\bar{\beta}z_1 + \alpha z_2)^k$$

である．右辺の各項の積を展開すれば $\Pi_n(g)f \in V_n$ および Π_n が連続であることがわかる．$c, d \in \mathbb{C}$, $f, h \in V_n$ に対して，

$$[\Pi_n(g)(cf + dh)](\boldsymbol{z}) = (cf + dh)(g^{-1}\boldsymbol{z}) = c[\Pi_n(g)f](\boldsymbol{z}) + d[\Pi_n(g)h](\boldsymbol{z})$$

より $\Pi_n(g)$ は V_n 上の線形変換である．また，$g_1, g_2 \in SU(2)$ に対して，

$$\begin{aligned} \Pi_n(g_1)[\Pi_n(g_2)f](\boldsymbol{z}) &= [\Pi_n(g_2)f](g_1^{-1}\boldsymbol{z}) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}\boldsymbol{z}) \\ &= f((g_1g_2)^{-1}\boldsymbol{z}) = [\Pi_n(g_1g_2)f](\boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

より $\Pi_n : SU(2) \to GL(V_n)$ は準同型写像である．以上より Π_n は $SU(2)$ の表現である． □

注意 8.1
Π_n が準同型写像になるためには，$\Pi_n(g)$ の定義において g の逆元をとる必要があることに注意せよ．Π_n の定義と同じ式により，$SU(2)$ より大きい群 $GL(2, \mathbb{C})$ あるいは $SL(2, \mathbb{C})$ の V_n 上の表現が定義される．

Π_n は，これ以上分けることのできない $SU(2)$ の表現の基本要素（既約有限次元表現）であり，既約有限次元表現は Π_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で尽くされる．既約有限次元表現の定義およびこの重要な事実の証明は，それぞれ定義 8.2 と 8.2 節で与える．

この節の残りでは，(Π_n, V_n) を色々な角度から見てみよう．

$$f_k(\boldsymbol{z}) = z_1^k z_2^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

とおくと，$\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ は V_n の基底をなす．

> **例題 8.2**
> 次を示せ．$x(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \in SU(2)$ $(t \in \mathbb{R})$ は $f_k(\boldsymbol{z}) = z_1^k z_2^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$ に
>
> $$\Pi_n(x(t))f_k = e^{i(n-2k)t}f_k$$
>
> により作用する．つまり $\Pi_n(x(t))$ は V_n の基底 $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ に関して対角成分が $e^{i(n-2k)t}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ の対角行列で表される．

解答 $[\Pi_n(x(t))f_k](\boldsymbol{z}) = (e^{-it}z_1)^k(e^{it}z_2)^{n-k} = e^{i(n-2k)t}f_k(\boldsymbol{z})$. □

例題 4.10 より

$$L(SU(2)) = \mathfrak{su}(2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} ix_3 & -x_2+ix_1 \\ x_2+ix_1 & -ix_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

である．$\varPi_n$ の微分表現を求めよう．

例題 8.3

$X \in \mathfrak{su}(2)$, $f \in V_n$ に対して，

$$\begin{aligned}[d\varPi_n(X)f](\boldsymbol{z}) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) X\boldsymbol{z} \\ &= -(ix_3z_1 + (-x_2+ix_1)z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} - ((x_2+ix_1)z_1 - ix_3z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2}\end{aligned}$$

であることを示せ．

解答 微分表現の定義と合成関数の微分の公式より，

$$\begin{aligned}[d\varPi_n(X)f](\boldsymbol{z}) &= \left.\frac{d}{dt}f(e^{-tX}\boldsymbol{z})\right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) \left.\frac{d\,(e^{-tX}\boldsymbol{z})}{dt}\right|_{t=0} \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) X\boldsymbol{z} \\ &= -(ix_3z_1 + (-x_2+ix_1)z_2)\frac{\partial f}{\partial z_1} - ((x_2+ix_1)z_1 - ix_3z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2}.\end{aligned}$$

□

例題 8.4

$X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ の $f_k(\boldsymbol{z}) = z_1^k z_2^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$ への作用は

$$[d\varPi_n(X)f_k](\boldsymbol{z}) = i(n-2k)f_k(\boldsymbol{z})$$

により与えられることを示せ．

解答 例題 8.3 より

$$d\varPi_n(X) = -iz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + iz_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

だから主張が従う．例題 8.2 の式を $t = 0$ で微分しても得られる． □

例題 8.4 より V_n は $\mathfrak{su}(2)$ の対角行列 X の作用による固有空間の直和に分解する．対角行列以外の $\mathfrak{su}(2)$ の元の作用は $\mathrm{ad}\,X$ の固有ベクトルについて見るとわかりやすい．そのために，$d\varPi_n$ を $\mathfrak{su}(2)$ の複素化 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 上に複素線形に拡張し，例題 4.11 で与えた

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の作用を考える（例題 8.4 の X は iH）.

例題 8.5
$d\Pi_n = \pi_n$ とおくと，

$$\pi_n(H) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2},$$
$$\pi_n(E) = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1},$$
$$\pi_n(F) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2}$$

であることを示せ．またこれらは $f_k(\boldsymbol{z}) = z_1^k z_2^{n-k}$ $(0 \leq k \leq n)$ に

$$\pi_n(H)f_k = (n-2k)f_k,$$
$$\pi_n(E)f_k = -kf_{k-1},$$
$$\pi_n(F)f_k = -(n-k)f_{k+1}$$

により作用することを示せ．

解答 例題 8.3 より $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $f \in V_n$ に対して，

$$[\pi_n(X)f](\boldsymbol{z}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}\right) X\boldsymbol{z}$$

である．これより前半部分が従う．これより f_k への作用はただちにわかる． □

定義 8.1
閉線形群 G の表現 (Π_V, V) と (Π_W, W) が**同値**であるとは，全単射 $A : V \to W$ が存在して，任意の $g \in G$ に対して

$$A \circ \Pi_V(g) = \Pi_W(g) \circ A$$

が成り立つことをいう．リー環の表現の同値も同様に定義される．

以下この章では，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現として，複素ベクトル空間上の複素線形な表現を考えるが,「複素線形」は省略する．

演習問題 8.1
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 $d\Pi_2$ は随伴表現と同値であることを示せ．

例題 8.5 は，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 $\pi_n = d\Pi_n$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底 H, E, F と V_n の基底 $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ に関して非常にきれいな形をしていることを示している．V_n は $\pi_n(H)$ の固有空間の直和に分解し，各固有値 $n-2k$ に対する固有空間は f_k で張られる 1 次元のベクトル空間である．つまり，$\pi_n(H)$ の固有空間分解 $V_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C}f_k$ が成り立つ．$\pi_n(H)$ の固有値を表現 π_n の**ウェイト**，固有空間を**ウェイト空間**という．$\pi_n(E)$ と $\pi_n(F)$ は，π_n の各ウェイト空間を別のウェイト空間に写す写像であり，$\pi_n(E)$ はウェイトを 2 だけ上げ，$\pi_n(F)$ はウェイトを 2 だけ下げる．(ただし，$\pi_n(E)f_0 = 0$, $\pi_n(F)f_n = 0$ の場合

を除く.)

$$\mathbb{C}f_n \underset{F}{\overset{E}{\rightleftharpoons}} \cdots \underset{F}{\overset{E}{\rightleftharpoons}} \mathbb{C}f_2 \underset{F}{\overset{E}{\rightleftharpoons}} \mathbb{C}f_1 \underset{F}{\overset{E}{\rightleftharpoons}} \mathbb{C}f_0$$

このように V_n は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の作用で鎖のようにつながっていて，これより小さい表現に分けることができない．この事実を正確に述べるために，表現の既約性を定義する．

定義 8.2
(Π, V) を閉線形群 G の有限次元複素ベクトル空間 V 上の表現とする．V の部分空間 W が

$$\Pi(g)W \subset W \quad ({}^\forall g \in G)$$

を満たすとき，W は V の**不変部分空間**であるという．このとき，Π の W への制限 Π_W は G の表現になる．(Π_W, W) を Π の**部分表現**と呼ぶ．V の不変部分空間が $\{0\}$ と V 以外ないとき，表現 (Π, V) は**既約**であるという．(Π, V) を G の有限次元表現，$v \in V$ とするとき，v を含む最小の不変部分空間を v により**生成される**表現と呼ぶ．複数の元により生成される表現も同様に定義される．

リー環の表現についても，不変部分空間，部分表現，既約性，表現空間の元により生成される表現の概念が閉線形群の場合と同様に定義される．

命題 8.1
$(d\Pi_n, V_n)$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現である．

[証明] $\pi_n = d\Pi_n$ とおく．$W \subset V_n$ をゼロでない不変部分空間とする．$\pi_n(H)$ はゼロでない複素ベクトル空間 W 上の線形変換だから，少なくとも 1 つ固有ベクトル $v \neq 0$ を持つ．$v \in V_n$ だから，v はある f_k $(0 \leq k \leq n)$ のゼロでない定数倍である．したがって，$f_k \in W$．例題 8.5 より，$\pi_n(E)f_k = -(n-k)f_{k+1}$, $\pi_n(F)f_k = -kf_{k-1} \in W$ である．したがって $k \neq n$ ならば $f_{k+1} \in W$，$k \neq 0$ ならば $f_{k-1} \in W$．繰り返せば，すべての k $(0 \leq k \leq n)$ に対して，$f_k \in W$，すなわち $W = V$ であることがわかる．よって (π_n, V_n) は既約である． □

我々は $SU(2)$ の表現 Π_n，その微分表現である $\mathfrak{su}(2)$ の表現 $d\Pi_n$，$\mathfrak{su}(2)$ の複素化 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の複素線形表現 $d\Pi_n$ を考察してきた．この 3 者の間で既約性の概念は同値である．

定理 8.2
連結閉線形群 G の有限次元表現 (Π, V)，その微分表現として得られる $\mathfrak{g} = L(G)$ の表現 $d\Pi$，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上に $d\Pi$ を複素線形に拡張して得られる $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の表現 $d\Pi$ の 3 者の既約性は互いに同値である．

例題 8.6
定理 8.2 を証明せよ．

解答 定理 6.4 より G は $\exp\mathfrak{g}$ により生成されることがわかっている．Π は既約であると仮定する．$W \subset V$ を $d\Pi(\mathfrak{g})$ 不変な部分空間とすると，$\Pi(e^X) = e^{d\Pi(X)}$ より W は $\Pi(G)$ 不変である．Π の既約性より $W = \{0\}$ または $W = V$ となり，$d\Pi$ は既約であることがわかる．逆に $d\Pi$ が既約であると仮定する．$W \subset V$ を $\Pi(G)$ 不変な部分空間とすると，特に W は $\Pi(\exp tX)$ $(X \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R})$ で不変だから，

$$d\Pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\Big|_{t=0}$$

で不変である．$d\Pi$ の既約性より $W = \{0\}$ または $W = V$，したがって Π は既約である．

$d\Pi$ は $\mathfrak{g}$ の表現として既約であると仮定する．$W \subset V$ を $d\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 不変な部分空間とすると，W は $d\Pi(\mathfrak{g})$ 不変だから，$W = \{0\}$ または $W = V$，したがって $d\Pi$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現として既約である．

$d\Pi$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現として既約であると仮定する．$W \subset V$ を $d\Pi(\mathfrak{g})$ 不変な部分空間とする．任意の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の元は $X + iY$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ と表されるが，定義より $d\Pi(X + iY) = d\Pi(X) + i\,d\Pi(Y)$ であり，仮定より W は $d\Pi(X), d\Pi(Y)$ で不変だから，$d\Pi(X + iY)$ で不変，したがって $d\Pi(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 不変である．仮定より $W = \{0\}$ または $W = V$，したがって $d\Pi$ は $\mathfrak{g}$ の表現として既約である． □

【解説】 単連結なコンパクト閉線形群 G の有限次元表現，$\mathfrak{g} = L(G)$ の有限次元表現，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素線形な有限次元表現が対応し，既約性や表現の同値性の概念が保たれる．この事実，あるいはその適用は「**ワイルのユニタリ・トリック**」と呼ばれる．

命題 8.1 と定理 8.2 より，次の命題が得られる．

命題 8.3
ゼロ以上の整数 n に対して (Π_n, V_n) は $SU(2)$ の $n+1$ 次元既約表現である．

後に見るように（例題 8.11）次の定理が成り立つ．

定理 8.4
$SU(2)$ の既約有限次元表現は同値を除いて (Π_n, V_n) $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で尽くされる．

8.2 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現

この節では，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現は $(d\Pi_n, V_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で尽くされることを示す．

前節と同じく $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の基底

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の表現への作用を考察する．H, E, F は，

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H$$

を満たしている（例題 4.11）．

例題 8.7
(π, V) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現とし，$\alpha\in\mathbb{C}$, $v\in V$ が $\pi(H)v=\alpha v$ を満たすとする．このとき次を示せ．

$$\pi(H)\pi(E)v=(\alpha+2)\pi(E)v,$$
$$\pi(H)\pi(F)v=(\alpha-2)\pi(F)v.$$

解答 $[H,E]=2E$ より，$[\pi(H),\pi(E)]=\pi([H,E])=2\pi(E)$，また，

$$[\pi(H),\pi(E)]=\pi(H)\pi(E)-\pi(E)\pi(H)$$

だから，

$$\pi(H)\pi(E)=\pi(E)\pi(H)+2\pi(E)$$

である．v に施すと，

$$\pi(H)\pi(E)v=\pi(E)\pi(H)v+2\pi(E)v=\pi(E)\alpha v+2\pi(E)v=(\alpha+2)\pi(E)v.$$

同様に，$[H,F]=-2F$ より，$\pi(H)\pi(F)v=(\alpha-2)\pi(F)v$ が得られる． □

【解説】 上の解答の議論はリー環の表現論において基本的なもので重要である．

例題 8.8
(π, V) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現とし，$\alpha\in\mathbb{C}$, $0\neq v\in V$ が $\pi(H)v=\alpha v$ を満たすとする．このとき，$\pi(E)^N v\neq 0$, $\pi(E)^{N+1}v=0$ を満たす非負整数が存在することを示せ．

解答 例題 8.7 より $\pi(E)v\neq 0$ ならば，$\pi(E)v$ は $\pi(H)$ の固有値 $\alpha+2$ に対する固有ベクトルである．同様に繰り返すと，$\pi(E)^n v\neq 0$ である限り，$\pi(E)^n v$ は $\pi(H)$ の固有値 $\alpha+2n$ に対する固有ベクトルである．V は有限次元だから $\pi(H)$ の相異なる固有値は有限個しかない．したがって題意が示された． □

【解説】 (π, V) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現とするとき，V の線形変換 $\pi(H)$ は少なくとも 1 つの固有値 α を持つ．さらに例題 8.8 において，$\lambda=\alpha+2N$, $v_0=\pi(E)^N v$ とおくと，$\pi(E)v=0$, $\pi(H)v=\lambda v$ を満たすゼロでないベクトル v が存在することがわかる．このような v を (π, V) の**最高ウェイトベクトル**，λ を**最高ウェイト**と呼ぶ．

例題 8.9
(π, V) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現，$\lambda\in\mathbb{C}$, $0\neq v_0\in V$ が $\pi(E)v_0=0$, $\pi(H)v_0=\lambda v_0$ を満たすとする．$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $v_k=\frac{1}{k!}\pi(F)^k v_0$ とおくとき，

$$\pi(H)v_k=(\lambda-2k)v_k\quad (k\geq 0),$$
$$\pi(E)v_k=(\lambda-k+1)v_{k-1}\quad (k\geq 1),$$
$$\pi(F)v_k=(k+1)v_{k+1}\quad (k\geq 0)$$

を示せ．

解答 $\pi(F)v_k$ については定義より明らか．例題 8.7 を繰り返し用いると，

$$\pi(H)v_k = (\lambda - 2k)v_k$$

が得られる．数学的帰納法により，$\pi(E)v_k = (\lambda - k + 1)v_{k-1}$ を示す．$k = 1$ のときは，

$$\pi(E)v_1 = \pi(E)\pi(F)v_0 = (\pi(F)\pi(E) + \pi(H))v_0 = \lambda v_0$$

となり成立する．$k \geq 2$ のとき，帰納法の仮定と上で示したことより，

$$\begin{aligned}
\pi(E)v_k &= \frac{1}{k}\pi(E)\pi(F)v_{k-1} \\
&= \frac{1}{k}(\pi(F)\pi(E) + \pi(H))v_{k-1} \\
&= \frac{1}{k}(\pi(F)(\lambda - k + 2)v_{k-2} + (\lambda - 2k + 2)v_{k-1}) \\
&= \frac{1}{k}((\lambda - k + 2)(k - 1) + (\lambda - 2k + 2))v_{k-1} \\
&= (\lambda - k + 1)v_{k-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

例題 8.10
n を非負整数，(π, V) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約有限次元表現とするとき，V の基底 $v_0, v_1, \ldots, v_n$ が存在して，以下が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}
&\pi(H)v_k = (n - 2k)v_k \quad (0 \leq k \leq n), \\
&\pi(E)v_k = (n - k + 1)v_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n), \\
&\pi(E)v_0 = 0, \\
&\pi(F)v_k = (k + 1)v_{k+1} \quad (0 \leq k \leq n - 1), \\
&\pi(F)v_n = 0.
\end{aligned}$$

解答 例題 8.8 およびその解説より $\pi(E)v_0 = 0$, $\pi(H)v_0 = \lambda v_0$ となるゼロでない $v_0 \in V$ が存在する．例題 8.9 により $v_1, v_2, \ldots$ を定めると，V は有限次元だから，ある非負整数 n が存在して $0 \leq k \leq n$ に対して $v_k \neq 0$, $v_{n+1} = 0$ が成り立つ．このとき，

$$0 = \pi(E)v_{n+1} = (\lambda - n)v_n$$

より，$\lambda = n$ がわかる．例題 8.9 より $v_0, v_1, \ldots, v_n$ への E, F, H の作用は主張の通りであることがわかる．$\pi(H)$ の固有値が相異なるから $v_0, \ldots, v_n$ は 1 次独立であり，これらのベクトルで張られるベクトル空間は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の作用で不変である．V は既約だから，この部分空間は V に一致する．したがって，$v_0, \ldots, v_n$ は V の基底である． □

例題 8.11
n を非負整数とするとき，次を示せ．
(1) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現が 2 つあればそれらは互いに同値である．
(2) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現は，8.1 節で定義した (Π_n, V_n) の微分表現と同値

である．

解答 (1) (π, V), (σ, U) を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現で，V の基底 $v_0,\ldots,v_n$ への E, H, F の作用が例題 8.10 により与えられ，U の基底 $u_0,\ldots,u_n$ についても同じ形の作用をしているように基底をとることができる．V から U への線形写像を $v_k \mapsto u_k$ により定義すると，これは表現 π と σ の同値を与える．
(2) 任意の非負整数 n に対して $(d\Pi_n, V_n)$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現であることは，例題 8.1 で示したから，(1) より $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の任意の $n+1$ 次元既約表現は $d\Pi_n$ と同値であることがわかる． □

【解説】 $(d\Pi_n, V_n)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の同値類で $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現が尽くされることがわかった．

例題 8.12
$(d\Pi_n, V_n)$ において例題 8.10 の条件を満たす基底 $v_0,\ldots,v_n$ を 1 組求めよ．

解答 例題 8.5 と例題 8.10 より，v_k は $f_k = z_1^k z_2^{n-k}$ の定数倍であるが，V_n の基底を

$$v_k = (-1)^k \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

で定めれば，$(d\Pi_n, V_n)$ の基底ベクトルへの作用は例題 8.10 にあるものと一致する． □

例題 8.10 で与えられる E, F, H の $v_0,\ldots,v_n$ への作用が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $V = \langle v_0,\ldots,v_n\rangle$ 上の $n+1$ 次元既約表現を与えることを直接示すこともできる．

例題 8.13
例題 8.9 において，最高ウェイト $\lambda = n$ が非負整数，$0 \leq k \leq n$ に対して $v_k \neq 0$, $v_{n+1} = 0$ のとき，$V = \langle v_0,\ldots,v_n\rangle$ は既約表現を与えることを，定義にしたがって確かめよ．

解答 表現であることを示すには，任意の $X, Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に対して $\pi([X,Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$ を示せばよい．線形性と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底 E, F, H の交換関係（例題 9.3）より，

$$[\pi(H),\, \pi(E)] = 2\pi(E),$$
$$[\pi(H),\, \pi(F)] = -2\pi(F),$$
$$[\pi(E),\, \pi(F)] = \pi(H)$$

を示せばよい．線形性より V の基底 $v_0,\ldots,v_n$ に対する作用を例題 8.9 を用いて調べればよい．$1 \leq k \leq n$ に対して，

$$\begin{aligned}
[\pi(H),\, \pi(E)]v_k &= \pi(H)\pi(E)v_k - \pi(E)\pi(H)v_k \\
&= \pi(H)(n-k+1)v_{k-1} - \pi(E)(n-2k)v_k \\
&= \{(n-k+1)(n-2k+2) - (n-2k)(n-k+1)\}v_{k-1} \\
&= 2(n-k+1)v_{k-1} = 2\pi(E)v_k.
\end{aligned}$$

また

$$[\pi(H),\,\pi(E)]v_0 = \pi(H)\pi(E)v_0 - \pi(E)\pi(H)v_0 = 0 - \pi(E)nv_0 = 0 = 2\pi(E)v_0.$$

したがって，$[\pi(H), \pi(E)] = 2\pi(E)$ である．残りの 2 つについても同様に示される．既約性は，命題 8.1 と同様に証明される． □

【解説】 例題 8.7，例題 8.9 は，V が無限次元でも成立する．$\lambda \in \mathbb{C}$ を最高ウェイト，v_0 を最高ウェイトベクトルとし，例題 8.9 において，任意の $k \geq 0$ に対して $v_k \neq 0$，V は $v_0, v_1, v_2, \ldots$ で生成される無限次元ベクトル空間であるような $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 $V = V(\lambda)$ が存在する．$V(\lambda)$ を最高ウェイト λ を持つ $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の**バーマ加群**という．$\lambda = n$ が非負整数であるとき，$V(-n-1)$ は $V(n)$ の不変部分空間になり，$V(n)/V(-n-1)$ は例題 8.13 で考察した $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現と同型である．

例題 8.10 において $\lambda = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を示す部分には π の既約性を用いておらず，π が有限次元表現であることだけを用いている．したがって次が成り立つことがわかる．

定理 8.5

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現 (π, V) に対して，$\pi(H)$ の固有値はすべて整数である．また，$v \in V$ をウェイト n を持つ最高ウェイトベクトルとすると，v, $\pi(F)v, \ldots, \pi(F)^n v$ は一次独立で，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現の基底をなす．

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現について得られた結果の要点を記しておく．

定理 8.6

任意の非負整数 n に対して $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現 (π_n, V_n) が同値を除いてただ 1 つ存在する．表現空間 V_n は，H の作用で固有値がそれぞれ $-n, -n+2, \ldots, n-2, n$ の 1 次元の固有空間の直和に分解する．

上の定理において，H の最大の固有値 n が既約表現 π_n の最高ウェイトである．

8.3 $SO(3)$ の表現

上で見た $SU(2)$ の場合には，$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の任意の既約有限次元表現は，$SU(2)$ の表現に対応していた．これは $SU(2)$ が単連結だからである（演習問題 6.28，系 7.5）．一般に，閉線形群 G の表現に対してその微分表現として $L(G)$ の表現が定まるが，逆に $L(G)$ の任意の表現に対してそれを微分表現とするような G の表現が存在するとは限らない．

例題 5.9 より $\mathrm{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ は全単射であり，核は $\{\pm\mathbf{1}\}$ である．また例題 5.8 よりリー環の同型 $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ がある．したがって，$SO(3)$ のすべての既約有限次元表現を求める問題は，$SU(2)$ あるいは $\mathfrak{su}(2)$ の表現の問題に帰着することができる．

演習問題 8.2

$SO(3)$ の有限次元表現 (τ, V) に対して，

$$\rho(g) = \tau(\mathrm{Ad}(g)) \qquad (g \in SU(2))$$

とすると，(ρ, V) は $SU(2)$ の表現であることを示せ．また，τ の既約性と ρ の既約性は同値であることを示せ．

例題 8.14
$\rho(g) = \tau(\mathrm{Ad}(g))$ $(g \in SU(2))$ を満たす $SO(3)$ の既約有限次元表現 τ が定義できるような $SU(2)$ の既約有限次元表現 ρ は，同値を除いて $\rho = \Pi_n$（n は非負の偶数）で尽くされることを示せ（Π_n は 8.1 節で定義した）．

解答 $\mathrm{Ker\,Ad} = \{\pm\mathbf{1}\}$ より，ρ が $SO(3)$ の表現を定めるための必要十分条件は $\rho(-\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ である．$SU(2)$ の既約有限次元表現は Π_n（n は非負整数）で尽くされる（定理 8.4）が，斉次次数 n が偶数のときに限り $\Pi_n(-\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ が成立する． □

リー環の表現を用いて考察することもできる．

例題 8.15
最高ウェイトが n である $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ の既約有限次元表現が $SO(3)$ の既約有限次元表現の微分表現であるのは，n が偶数のとき，そしてそのときに限ることを示せ．

解答 最高ウェイトが n の $\mathfrak{su}(2)$ の既約有限次元表現を ρ_n と書く．Ad の核は $\{\pm\mathbf{1}\} = \{\mathbf{1}, \exp \pi i H\}$ だから，ρ_n が $SO(3)$ の既約有限次元表現 τ の微分表現と $\mathrm{ad} : \mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ を通じて対応している，すなわち

$$\tau(\mathrm{Ad}(\exp X)) = \exp \rho_n(X) \qquad (X \in \mathfrak{su}(2))$$

が成り立つための必要十分条件は $\exp \rho_n(\pi i H) = \exp \pi i \rho_n(H) = \mathbf{1}$ となることである．これは最高ウェイト n が偶数のとき，そしてそのときに限る． □

以上により次の定理が示された．

定理 8.7
非負の偶数 n に対して $SO(3)$ の $n+1$ 次元既約表現が同値を除いてただ 1 つ存在する．$SO(3)$ の既約有限次元表現はこれらで尽くされる．

8.4 表現のテンソル積

$SU(2)$ あるいは $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の 2 変数 n 次斉次多項式全体のなすベクトル空間 V_n 上の表現は $n+1$ 次元既約表現であり，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の任意の既約有限次元表現は，ある非負整数 n に対する V_n 上の表現と同値であることを 8.2 節で示した．2 つの既約有限次元表現の**テンソル積表現**を次のように定める．

変数を区別して，V_m は z_1, z_2 の m 次斉次多項式全体のなすベクトル空間，V_n は w_1, w_2 の n 次斉次多項式全体のなすベクトル空間とする．4 つの変数 z_1, z_2, w_1, w_2

の多項式で z_1, z_2 について m 次斉次，w_1, w_2 について n 次斉次であるもの全体のなすベクトル空間を V_m と V_n の**テンソル積**と呼び，$V_m \otimes V_n$ と書く．$V_m \otimes V_n$ は，V_m の基底 $f_k = z_1^k z_2^{m-k}$ $(0 \leq k \leq m)$ と V_n の基底 $g_l = w_1^l w_2^{n-l}$ $(0 \leq l \leq n)$ の積 $f_k g_l = z_1^k z_2^{m-k} w_1^l w_2^{n-l}$ $(0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n)$ を基底とする $(m+1)(n+1)$ 次元のベクトル空間である．

$SU(2)$ の $V_m \otimes V_n$ 上の表現 $\Pi_m \otimes \Pi_n$ は，基底に対して

$$(\Pi_m \otimes \Pi_n)(x)(f_k g_l) = \Pi_m(x) f_k \cdot \Pi_n(x) g_l \quad (x \in SU(2))$$

として，線形に拡張することにより定義される．$(\Pi_m \otimes \Pi_n, V_m \otimes V_n)$ を (Π_m, V_m) と (Π_n, V_n) の**テンソル積表現**と呼ぶ．

上では，テンソル積の基底への $SU(2)$ の作用を見たが，次のように述べることもできる．

$$\begin{aligned} V_m \otimes V_n = \{ f \in \mathbb{C}[z_1, z_2, w_1, w_2] :& \\ & f(\lambda z_1, \lambda z_2, \mu w_1, \mu w_2) = \lambda^m \mu^n f(z_1, z_2, w_1, w_2) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})\}, \\ ((\Pi_m \otimes \Pi_n)(x) f)(z_1, z_2, w_1, w_2) &= f(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2, aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) \\ & \left(x^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in SU(2) \right). \end{aligned}$$

$SU(2)$ の表現の微分表現として $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現が得られる．$d\Pi_n = \pi_n$ とする．$\Pi_m \otimes \Pi_n$ の微分表現 $\pi_m \otimes \pi_n$ は，積の微分の規則から，

$$(\pi_m \otimes \pi_n)(X)(f_k g_l) = \pi_m(X) f_k \cdot g_l + f_k \cdot \pi_n(X) g_l \quad (X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$$

により与えられる．$(\pi_m \otimes \pi_n, V_m \otimes V_n)$ を (π_m, V_m) と (π_n, V_n) の**テンソル積表現**と呼ぶ．

演習問題 8.3

$(\Pi_m \otimes \Pi_n, V_m \otimes V_n)$ は $SU(2)$ の表現であることを確かめよ．

$SU(2)$ の既約有限次元表現のテンソル積を具体的に実現したが，我々は同型なベクトル空間や同値な表現をしばしば同一視して考えるので，テンソル積を抽象的に定義しておくのがよい．

V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間，$v_1, \ldots, v_m$ を V の基底，$w_1, \ldots, w_n$ を W の基底とする．このとき，V と W の**テンソル積** $V \otimes W$ を $v_j \otimes w_k$ $(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ を基底とする mn 次元のベクトル空間として定める．(ここで $v_j \otimes w_k$ は単に抽象的な記号であり，j または k が違えば線形独立と定めたものである．) ただ単に mn 次元のベクトル空間をとったというだけではなく，双線形写像 $V \times W \to V \otimes W$ が存在するという意味で，元のベクトル空間 V, W と関係づけられている．つまり，$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$, $w = b_1 w_1 + \cdots + b_n w_n$ に対して，$v \otimes w = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j b_k \, v_j \otimes w_k$ と定めれば，

$$\begin{aligned} (\lambda v + \mu v') \otimes w &= \lambda v \otimes w + \mu v' \otimes w \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ v, v' \in V,\ w \in W), \\ v \otimes (\lambda w + \mu w') &= \lambda v \otimes w + \mu v \otimes w' \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ v \in V,\ w, w' \in W) \end{aligned}$$

が成り立つ．$V \otimes W$ は基底の取り方によらず一意的に定まる*1)．

定義 8.3
閉線形群 G の表現 (ρ_V, V) と (ρ_W, W) の**テンソル積** $(\rho_V \otimes \rho_W, V \otimes W)$ を

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W : G &\to GL(V \otimes W), \\ x &\mapsto (v \otimes w \mapsto \rho_V(x)v \otimes \rho_W(x)w) \end{aligned}$$

により定義する．

リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ_V, V) と (ρ_W, W) の**テンソル積** $(\rho_V \otimes \rho_W, V \otimes W)$ を

$$\begin{aligned} \rho_V \otimes \rho_W : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{gl}(V \otimes W), \\ X &\mapsto (v \otimes w \mapsto \rho_V(X)v \otimes w + v \otimes \rho_W(X)w) \end{aligned}$$

により定義する．

演習問題 8.4
閉線形群またはリー環の表現のテンソル積が表現の定義を満たしていることを確かめよ．

一般にテンソル積表現は既約でない．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現のテンソル積の既約有限次元表現への分解を調べよう．

> **例題 8.16**
> $V_1 \otimes V_1 \simeq V_2 \oplus V_0$ を示せ．

解答 (π_1, V_1) は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ 上の自然表現と同値である．V_1 と $\mathbb{C}^2$ を同一視する．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{C}^2$ の標準基底とすると，$V_1 \otimes V_1$ は $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ $(1 \leq i,\ j \leq 2)$ を基底とするベクトル空間であり，$H = \mathrm{diag}(1, -1)$ の固有値（ウエイト）は，

$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$	ウエイト 2,
$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1$	ウエイト 0,
$\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2$	ウエイト -2

である．$E\boldsymbol{e}_1 = 0$ より，

$$E(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) = E\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes E\boldsymbol{e}_1 = 0,$$

したがって $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$ はウエイト 2 を持つ最高ウェイトベクトルである．例題 8.11 より $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$ により 3 次元既約表現が生成される．F を作用させて表現空間の基底を具体的に求めてみよう．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) &= F\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes F\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \\ F^2(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) &= F(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \\ F^3(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) &= F(2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2) = 0. \end{aligned}$$

---

*1) テンソル積は数学において重要な概念である．ベクトル空間のテンソル積については，[22], [30] を参照のこと．

したがって，$e_1 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_2$ を基底とする 3 次元空間ベクトル空間上の既約表現がある．$V_1 \otimes V_1$ のゼロウェイト空間の元 $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ は最高ウェイトベクトルである．実際，

$$E(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 = 0$$

が成り立つ．最高ウェイトは 0 だから，このベクトルは 1 次元既約表現の基底である．以上により，$V_1 \otimes V_1 \simeq V_2 \oplus V_0$ であることがわかる． □

演習問題 8.5

例題 8.16 の解答の記号の下で，$V_1 \otimes V_1$ の基底 $e_1 \otimes e_1$, $e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$ に関する $(\pi_1 \otimes \pi_1)(H)$, $(\pi_1 \otimes \pi_1)(E)$, $(\pi_1 \otimes \pi_1)(F)$ の表現行列を求めよ．

演習問題 8.6

V_n を $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の $n+1$ 次元既約表現とするとき，$V_m \otimes V_n$ は，最高ウェイト $m+n-2k$ $(0 \le k \le \min(m, n))$ を持つ最高ウェイトベクトルを含むことを示せ．また，

$$V_m \otimes V_n \simeq V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus + \cdots + \oplus V_{|m-n|}$$

を示せ．

8.5 完全可約性

例題 8.16，演習問題 8.6 で見たように，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現のテンソル積は既約表現の直和に分解する．$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$， あるいは，より一般に任意の単純リー環の表現に対して次が成り立つ．

定理 8.8

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の任意の有限次元表現は，既約有限次元表現の直和に同型である．

これはまた，次と同値である．

定理 8.9

$SU(2)$ の任意の有限次元表現は，既約有限次元表現の直和に同型である．

上の 2 つの定理の主張は，「$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ または $SU(2)$ の任意の有限次元表現は**完全可約**である」とも言い表される．一般に次が成り立つ．

定理 8.10

コンパクトリー群の任意の有限次元表現は，完全可約である．

完全可約な表現の重要なクラスはユニタリ表現である．G の有限次元表現 (Π, V) が**ユニタリ表現**であるとは，V 上のエルミート内積 $\langle , \rangle$ が存在して，

$$\langle \Pi(g)v,\, \Pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \qquad ({}^\forall v,\, w \in V,\, {}^\forall g \in G)$$

が成り立つことをいう．つまり任意の $g \in G$ に対して $\Pi(g)$ が V のユニタリ変換になっていることをいう．

例題 8.17
(Π, V) をコンパクトリー群 G のユニタリ表現とするとき次の問いに答えよ．
(1) $U \subset V$ を不変部分空間とすると，G 不変なエルミート内積に関するその直交補空間 $U^{\perp} \subset V$ も不変部分空間であることを示せ．
(2) V は完全可約であることを示せ．

解答 (1) $v \in U^{\perp}$ とすると，任意の $u \in U$ に対して

$$\langle \Pi(g)v, u\rangle = \langle v, \Pi(g^{-1})u\rangle = 0$$

が成り立つから，$\Pi(g)v \in U^{\perp}$，したがって $U^{\perp} \subset V$ は不変部分空間である．
(2) V が既約でなければ，自明でない不変部分空間 $U \subset V$ が存在し，V は不変部分空間の直和 $V = U \oplus U^{\perp}$ に分解する．U または $U^{\perp}$ が既約でなければ同様の操作により不変部分空間の直和に分解する．V は有限次元だから，有限回のステップで V は既約有限次元表現の直和に分解される． □

注意 8.2
本書では，最初から有限次元表現に限って話を進めているが，コンパクトリー群のヒルベルト空間上のユニタリ表現が既約ならば有限次元であることが知られている（[28, §4.1] 参照）．

定理 8.10 は，コンパクトリー群 G の有限次元表現 (Π, V) がユニタリ表現になるような V 上のエルミート内積を与えることにより証明される．このような内積（ユニタリ内積）の作り方を簡単な例で見てみよう．

例 8.1
G が有限群の場合
(Π, V) を有限群 G の有限次元表現，$(\,,\,)$ を V 上の任意のエルミート内積とする．このとき，

$$\langle v, w\rangle = \sum_{g \in G} (\Pi(g)v,\, \Pi(g)w) \qquad (v,\, w \in V)$$

とする．$\langle v, v\rangle = \sum (\Pi(g)v, \Pi(g)v) \geq 0$ であり，等号が成り立つとすると，任意の $g \in G$ に対して $(\Pi(g)v, \Pi(g)v) = 0$，特に $g = e$ として $(v, v) = 0$，したがって $v = 0$ である．よって $\langle\,,\,\rangle$ は V 上のエルミート内積を定める．

$$\begin{aligned}\langle \Pi(x)v,\, \Pi(x)w\rangle &= \sum_{g \in G} (\Pi(g)\Pi(x)v,\, \Pi(g)\Pi(x)w) \\ &= \sum_{g \in G} (\Pi(gx)v,\, \Pi(gx)w) \\ &= \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

より，$\langle\,,\,\rangle$ に関して (Π, V) はユニタリ表現になる．

例 8.2
$G=U(1)$ **の場合**
(Π, V) を $U(1)$ の有限次元表現，$(\,,\,)$ を V 上の任意のエルミート内積とする．このとき，

$$\langle v, w\rangle = \int_0^{2\pi} (\Pi(e^{i\theta})v, \Pi(e^{i\theta})w)d\theta \qquad (v,\, w\in V)$$

は V 上のエルミート内積を定め，

$$\begin{aligned}\langle \Pi(e^{i\phi})v,\, \Pi(e^{i\phi})w\rangle &= \int_0^{2\pi} (\Pi(e^{i\theta})\Pi(e^{i\phi})v,\, \Pi(e^{i\theta})\Pi(e^{i\phi})w)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\Pi(e^{i(\theta+\phi)})v,\, \Pi(e^{i(\theta+\phi)})w)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\Pi(e^{i\theta})v,\, \Pi(e^{i\theta})w)d\theta = \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

より，$\langle\,,\,\rangle$ に関して (Π, V) はユニタリ表現になる．

一般のコンパクト閉線形群 G に対しても上の 2 つの例と同じ方法で V の内積からユニタリ内積を作ることができる．G 上の**左ハール測度** dg とは，G 上の測度で，任意の $x\in G$ に対して，

$$\int_G f(xg)dg = \int_g f(g)dg$$

を満たすものをいう．例 8.2 より，$d\theta$ は $U(1)=\mathbb{T}\simeq\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の左ハール測度である．コンパクトリー群 G に対して，左ハール測度が存在して（定理 8.12），コンパクト性より G の測度は有限であるから，上と同じ議論が可能である．

命題 8.11
dg をコンパクトリー群 G の左ハール測度，(Π, V) を G の有限次元表現，$(\,,\,)$ を V 上の任意のエルミート内積とするとき，

$$\langle v,\, w\rangle = \int_G (\Pi(g)v,\, \Pi(g)w)dg \quad (v,\, w\in V)$$

は，V 上のエルミート内積を定め，(Π, V) はこの内積に関してユニタリ表現になる．

演習問題 8.7
命題 8.11 を示せ．

定理 8.12
閉線形群上には，左ハール測度が存在する．

[証明] 6.3 節で示したように，閉線形群は微分可能多様体の構造を持つ．この定理は多様体論の標準的な議論により証明される．多様体論の解説には深入りせず，概略を述べる．

$x\in G$ における G の接空間を T_xG と書く．これは，$c(0)=x$ を満たす G 内の滑らかな曲線 $c(t)$ の x における接ベクトル $c'(0)$ 全体のなす実線形空間である．$g\in G$ に対

して，$L_g x = gx$ により定義される微分同相写像 $L_g : G \to G$ は接空間の間の線形同型写像 $(dL_g)_x : T_xG \to T_{gx}G$ を引き起こす．実際，$c(0) = x$ を満たす G 内の滑らかな曲線 $c(t)$ に対して，$L_g c(t)$ は $c(0) = gx$ を満たす G 内の滑らかな曲線で，$(DL_g)_x$ は $c'(0)$ に対して $gc'(0)$ を対応させる写像である．

T_x^*G を G の x における余接空間，すなわち T_xG の双対空間とすると，余接空間の間の線形同型写像 $(L_g^*)_x : T_{gx}^*G \to T_x^*G$ が誘導される．これは，$\omega_{gx} \in T_{gx}^*G$ に対して，$(L_g^*)_x\omega_{gx} = \omega_{gx} \circ (dL_g)_x$ により定義される．$\omega_{\mathbf{1}} \in T_{\mathbf{1}}^*G$ に対して $\omega_L(g) = (L_g^*)_{\mathbf{1}}^{-1}\omega_{\mathbf{1}}$ とおくと，ω_L は G 上の 1 形式である．すなわち $\omega_L(g) \in T_g^*G$ である．このとき，

$$(L_{g'}^*)_g^{-1}\omega_L(g) = (L_{g'}^*)_g^{-1}(L_g^*)_{\mathbf{1}}^{-1}\omega_{\mathbf{1}} = (L_{g'g}^*)_{\mathbf{1}}^{-1}\omega_{\mathbf{1}} = \omega_L(g'g),$$

すなわち，$(L_{g'}^*)_g\omega_L(g'g) = \omega_L(g)$ が成り立つ．これは，ω_L が左 G 不変な 1 形式であることを示している．

$\mathbf{1} \in G$ の近傍における局所座標を $x_1, \ldots, x_n$ とすると，n 形式

$$\omega_{\mathbf{1}} = (dx_1)_{\mathbf{1}} \wedge \cdots \wedge (dx_n)_{\mathbf{1}} \in \bigwedge^n T_{\mathbf{1}}^*G$$

に対して上と同様に引き戻し L_g^* が定義され，$\omega_L(g) = (L_g^*)_{\mathbf{1}}^{-1}\omega_{\mathbf{1}}$ により G 上の左不変な n 形式が定義される．G 上 $\omega_L \neq 0$ であり，$d_Lg = |\omega_L(g)|$ が G 上の左不変な測度になり，

$$\int_G f(xg)d_Lg = \int_G f \circ L_x L_x^* d_Lg = \int_G f\, d_Lg$$

が成り立つ． □

本書では用いないが，ハール測度について知られている重要事項を証明抜きで挙げておく．

閉線形群 G 上の左ハール測度は定数倍を除いて一意的に存在する．また，L_g の代わりに $R_g x = xg$ を考えることにより，右ハール測度も定義され，左ハール測度と同様の結果が成り立つ．コンパクトリー群に対して，左ハール測度は右不変になる．したがって，コンパクトリー群に対しては，両側不変測度が定数倍を除いてただ 1 つ存在し，G の測度が 1 であるように正規化することができる．これを正規化されたハール測度という．

$SU(2)$ 上の左ハール測度について補足しておく．$SU(1) = \{\mathbf{1}\}$ だから，例題 6.9 より，$SU(2) \simeq O(4)/O(3) \simeq S^3$ である．演習問題 2.20 より，$SU(2) \subset O(4)$ と見なすことができ，S^3 はいずれの群の等質空間にもなっているのである．3 次元球面 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ 上の体積要素は，直交変換で不変であり，これを $SU(2)$ 上の左不変測度としてとれる．(球面極座標による具体形は [37, II §4] を参照のこと.)

リー環の表現に関する定理 8.10 の対応物は，次で与えられる．

定理 8.13
複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現は完全可約である．

これは，ワイルのユニタリトリックにより，定理 8.8 と同等である．代数的な証明は [13, Chapter II, §6.3] を参照のこと．

8.6 シューアの補題

(Π_V, V), (Π_W, W) を閉線形群 G の有限次元表現とするとき，線形写像 $A : V \to W$ が，任意の $g \in G$ に対して，

$$A \circ \Pi_V(g) = \Pi_W(g) \circ A$$

を満たすとき，A は**絡作用素**であるという．

リー環の表現に対しても同様に絡作用素が定義される．

表現論において基本的なシューアの補題を述べておく．閉線形群とリー環の表現の両方について述べるため，Π_V などを明示せず，表現空間 V や W により表現を示すことにする．

定理 8.14 (シューアの補題)

(1) V, W を閉線形群またはリー環の既約有限次元表現で，$A : V \to W$ を絡作用素とする．このとき，A は同型写像かゼロ写像のいずれかである．

(2) V を閉線形群またはリー群の既約有限次元表現，$A : V \to V$ を同型な絡作用素とするとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，$A = \lambda \, \mathrm{id}$ （$\mathrm{id} : V \to V$ は恒等写像）である．

(3) V, W を閉線形群またはリー環の既約有限次元表現で，$A_j : V \to W$ $(j = 1, 2)$ を同型な絡作用素とするとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，$A_1 = \lambda A_2$ である．

[証明] (1) 群の場合に証明する（リー環の場合も同様）．$v \in \mathrm{Ker}\, A$ とすると，任意の $g \in G$ に対して，

$$A(\Pi(g)v) = \Pi(g)A(v) = 0$$

より $\Pi(g)v \in \mathrm{Ker}\, A$ である．したがって，$\mathrm{Ker}\, A$ は，V の部分表現である．V の既約性より $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ または $\mathrm{Ker}\, A = V$ のいずれかが成り立つ．したがって，A は単射またはゼロ写像のいずれかである．A が単射のとき，A が絡作用素であることから，$\mathrm{Im}\, A \subset W$ はゼロでない部分表現になる．W の既約性より，$\mathrm{Im}\, A = W$，したがって A は全単射である．

(2) A は少なくとも 1 つの固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ を持つ．U を固有値 λ に対する固有空間とする．任意の $u \in U$, $g \in G$ に対して，

$$A(\Pi(g)u) = \Pi(g)A(u) = \lambda \Pi(g)u$$

より，$\Pi(g)u \in U$，したがって，$U \subset V$ はゼロでない部分表現である．V の既約性より，$V = U$，したがって，$A = \lambda \, \mathrm{id}$ が成り立つ．

(3) 上の (2) より容易に従う． □

演習問題 8.8

定理 8.14 の (2) を用いて (3) を示せ．

シューアの補題の応用を演習問題として与える．

演習問題 8.9

(Π, V) を閉線形群 G の既約有限次元表現，g が G の中心に含まれるとき，ある $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $\Pi(g) = \lambda\,\mathrm{id}$ であることを示せ．

演習問題 8.10

可換な閉線形群または可換なリー環の既約有限次元表現は 1 次元表現に限ることを示せ．

この章では，$SU(2)$, $SO(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現について調べた．触れなかった話題として，$SU(2)$ の表現の指標，S^2 上の球面調和関数の話題がある．これらについては，[37, II 章] を参照のこと．

次の章では，この章で準備した結果，手法を用いて，$SU(3)$ および $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現について調べる．

第 9 章

$SU(3)$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現

定理 6.8 より $SU(3)$ は単連結だから，系 7.6 より，$SU(3)$ の有限次元表現の全体と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元複素線形表現の全体は 1 対 1 に対応する．

前の章で $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現を分類，記述した方法を拡張して，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現を分類，記述する．本書で表現を調べる複素リー環は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ だけだが，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ そして一般の複素単純リー環の既約有限次元表現を取り扱うのに必要な概念・手法は，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合に現れている．

9.1 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ のルート分解

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現を調べる際に，$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の作用に関する固有空間に分解することが重要だった．$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合には，対角行列が，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合に H が果たしたのと同様の役割を果たす．$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \{X \in M(3,\mathbb{C}) : \mathrm{Tr}\, X = 0\}$ に属する対角行列の全体を $\mathfrak{h}$ と書く．

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}\,(x_1, x_2, x_3) \in M(3,\mathbb{C}) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

$\mathfrak{h}$ の元 H_1, H_2 を

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

により定める．$\mathfrak{h}$ は H_1, H_2 を基底とするベクトル空間である．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の**カルタン部分環**と呼ぶ．

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現 (π, V) に対して，$\pi(H_1)$, $\pi(H_2)$ 両方の固有ベクトルになっているような V の元を調べる．実は V の任意の元はこのような同時固有ベクトルに分解されることを後に見る．$\pi(H_1)$ と $\pi(H_2)$ の固有値を記述するために記号を用意する．$e_i(\mathrm{diag}\,(x_1, x_2, x_3)) = x_i\ (i = 1, 2, 3)$ とおく．$\{e_1, e_2, e_3\}$ は 3 次対角行列のなす線形空間 $\tilde{\mathfrak{h}} \simeq \mathbb{C}^3$ の双対空間の基底であり，$\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ の双対空間は，

$$\mathfrak{h}^* = \{y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \,:\, y_i \in \mathbb{C},\, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$$

である.（一般に U を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とするとき，U の**双対空間** U^* とは，U から $\mathbb{K}$ への $\mathbb{K}$-線形写像全体のなすベクトル空間のことをいう.）$\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ とおくと，$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は $\mathfrak{h}^*$ の 1 組の基底を与える.

$\mathfrak{h}$ 上にエルミート内積

$$\langle X, Y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 \quad (X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3),\, Y = \mathrm{diag}(y_1, y_2, y_3) \in \mathfrak{h})$$

を定める.

例題 9.1

$X \in \mathfrak{h}$ に対して，写像 $H \mapsto \langle H, X\rangle$ $(H \in \mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}^*$ の元を定める．この対応により $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ であることを示せ．またこの同一視により $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ はそれぞれ $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{h}^*$ と対応することを示せ.

解答 内積は非退化だから上の対応は $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ への単射であり，次元が等しいから全射である．$\alpha_i(H_j) = \langle H_j, H_i\rangle$ $(1 \leq i, j \leq 2)$ であることは容易に確かめられる. □

【解説】 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\lambda(H) = \langle H, H_\lambda\rangle$ $(H \in \mathfrak{h})$ となる $H_\lambda \in \mathfrak{h}$ がただ 1 つ存在する．$\mathfrak{h}^*$ 上の内積を $\langle\lambda, \mu\rangle = \langle H_\lambda, H_\mu\rangle$ により定義することができ，$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ は内積空間として同型になる.

$\mathrm{ad}\, X(Y) = [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$ により定義される随伴表現 ad について考えよう．$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \,:\, [H, X] = \alpha(H)X \ ({}^\forall H \in \mathfrak{h})\}$$

とおく．$\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ であるような，$\alpha \neq 0$ を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の**ルート**，$\mathfrak{g}_\alpha$ を**ルート空間**，$\mathfrak{g}_\alpha$ のゼロでない元を**ルートベクトル**と呼ぶ．ルート空間は $\mathrm{ad}\, H_1$, $\mathrm{ad}\, H_2$ の同時固有ベクトルの空間である．$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のルート全体の集合を Δ で表し $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の**ルート系**と呼ぶ.

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は $\mathrm{ad}\, H$ の固有空間に分解し，固有ベクトルどうしのカッコ積に関する交換関係は例題 4.11 で与えられた．これは $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の場合に次のように一般化される.

例題 9.2

$1 \leq i, j \leq 3$ に対して $E_{ij} \in M(3, \mathbb{C})$ を (i, j) 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 の行列とするとき，次を示せ.

(1) $E_{12} \in \mathfrak{g}_{e_1 - e_2}$，すなわち $[H_1, E_{12}] = 2E_{12}$, $[H_2, E_{12}] = -E_{12}$ が成り立つ.

(2) $\mathfrak{g}_{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{ij}$ $(1 \leq i \neq j \leq 3)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$,

$$\Delta = \{\pm(e_1 - e_2),\, \pm(e_2 - e_3),\, \pm(e_1 - e_3)\},$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{（ルート空間分解）}.$$

(3) Δ の元 $\alpha = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ を平面 $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$

上の点と見なして図示せよ．

解答 (1), (2) はカッコ積の定義よりただちに確かめられる．
(3) $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{2}$, $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3 \rangle = -1$ より，α_1 と α_2 のなす角は $2\pi/3$ である．したがって，Δ は平面 $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ 上の原点を中心とする正 6 角形の頂点の集合に対応する（図 9.1）． □

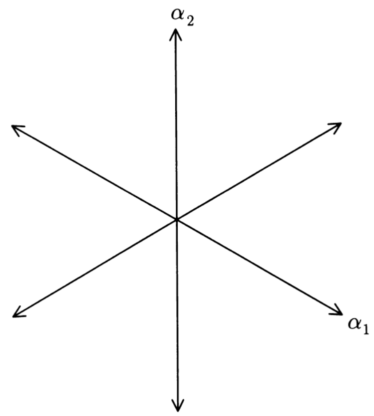


図 9.1　$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のルート系．

【解説】 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}H_1 \oplus \mathbb{R}H_2$ とすると，ルートは $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 上実数値をとる．$\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ が 2 条件
(i) $\lambda(H_1) > 0$,
(ii) $\lambda(H_1) = 0$ かつ $\lambda(H_2) > 0$
のいずれかを満たすとき，λ は**正**であると定める．

正のルート全体の集合を Δ^+ とおくと，

$$\Delta^+ = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2\} = \{e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ e_1 - e_3\}$$

である．$\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$ が成り立つ．

$\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ がゼロでなければ，λ か $-\lambda$ のいずれかは正である．$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して，$\lambda - \mu$ が正であるとき，$\lambda > \mu$ として，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に順序を定義する．この $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 上の順序を $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底 H_1, H_2 に関する**辞書式順序**という．

例題 9.3
(1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ を示せ．また，$\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ ならば $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，そして $\alpha \in \Delta$ ならば $\{0\} \neq [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ が成り立つことを示せ．
(2) $\alpha \in \Delta^+$ に対して，$\mathfrak{g}(\alpha) = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ に同型な $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の部分リー環であることを示せ．

解答 (1) 最初の主張はヤコビ恒等式から従う．実際，$X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ ならば，$H \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\operatorname{ad} H([X,Y]) = [[H,X],Y] + [X,[H,Y]]$$
$$= \alpha(H)[X,Y] + \beta(H)[X,Y] = (\alpha+\beta)(H)[X,Y].$$

2 番目の主張は，$\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$ となるすべての組合せ

$$(\alpha,\beta) = (e_1-e_2, e_2-e_3),\ (e_1-e_3, e_2-e_1),\ (e_2-e_3, e_3-e_1),$$
$$(e_2-e_1, e_3-e_2),\ (e_3-e_1, e_1-e_2),\ (e_3-e_2, e_1-e_3)$$

についてルートベクトルのカッコ積を計算することにより示される．$E_{12} \in \mathfrak{g}_{e_1-e_2}$, $E_{23} \in \mathfrak{g}_{e_2-e_3}$ について

$$[E_{12}, E_{23}] = E_{12}E_{23} - E_{23}E_{12} = E_{13} \in \mathfrak{g}_{e_1-e_3},$$

したがって，$[\mathfrak{g}_{e_1-e_2}, \mathfrak{g}_{e_2-e_3}] = \mathfrak{g}_{e_1-e_3}$．他の組合せについても同様である．
$[Y,X] = -[X,Y]$ だから，3 番目の主張は，$\alpha = e_1-e_2$, e_2-e_3, e_1-e_3 について確かめればよい．$E_{ij} \in \mathfrak{g}_{e_i-e_j}$, $E_{ji} \in \mathfrak{g}_{e_j-e_i}$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ に対して，

$$[E_{12}, E_{21}] = H_1,$$
$$[E_{23}, E_{32}] = H_2,$$
$$[E_{13}, E_{31}] = H_1 + H_2$$

より主張が示された．
(2) $\alpha = e_1 - e_2$ のとき，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底 H, E, F と H_1, E_{12}, E_{21} を対応させると，(1) より主張が従う．他の $\alpha \in \Delta^+$ についても同様である． □

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底 $\{E, H, F\}$ の交換関係（例題 4.11）

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

と同じ交換関係を満たすリー環の元の 3 つ組を **$\mathfrak{sl}_2$-トリプル**という．$\mathfrak{sl}_2$-トリプルで生成される複素リー環は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型である．

演習問題 9.1
$\{E_{12}, H_1, E_{21}\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-トリプルであることを確かめよ．これは $\mathfrak{g}(\alpha_1)$ の基底である．$\mathfrak{g}(\alpha_2)$, $\mathfrak{g}(\alpha_1+\alpha_2)$ それぞれの基底を与える $\mathfrak{sl}_2$-トリプルを求めよ．

例題 9.4
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{h}^*$ を $\lambda_i(H_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq 2)$ により定めるとき，次の問いに答えよ．（ただし δ_{ij} は $i=j$ のとき 1，$i \neq j$ のとき 0.）
(1) λ_1, λ_2 を α_1 と α_2 の 1 次結合で表せ．また，

$$\lambda_1(H) = e_1(H), \quad \lambda_2(H) = -e_3(H) \quad (H \in \mathfrak{h})$$

を示せ．
(2) Δ の元を λ_1 と λ_2 の一次結合で表せ．

解答 (1) $\lambda_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ とおくと，$\lambda_1(H_1) = 2c_1 - c_2$, $\lambda_1(H_2) = -c_1 + 2c_2$. $2c_1 - c_2 = 1$, $-c_1 + 2c_2 = 0$ より，$c_1 = 2/3$, $c_2 = 1/3$ だから，

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 .$$

同様に

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 .$$

$e_1(H_j) = \delta_{1j}$, $-e_3(H_j) = \delta_{2j}$ より後者の主張が成り立つ．このことは，$\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ を用いて，

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = e_1 - \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3),$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = -e_3 + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3)$$

としてもわかる．

(2) $\alpha_1 = e_1 - e_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3 = -\lambda_1 + 2\lambda_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = e_1 - e_3 = \lambda_1 + \lambda_2$. $-\alpha_1 = -2\lambda_1 + \lambda_2$, $-\alpha_2 = \lambda_1 - 2\lambda_2$, $-\alpha_1 - \alpha_2 = -\lambda_1 - \lambda_2$.（係数がすべて整数であるという特徴がある.） □

演習問題 9.2
$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ は単純であることを示せ.

9.2 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現のウェイト

以下この章では，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現として，常に複素ベクトル空間上の複素線形な表現を考えるので,「複素線形」は省略する.

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現 (π, V) と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$V_\lambda = \{v \in V : \pi(H)v = \lambda(H)v \quad ({}^\forall H \in \mathfrak{h})\}$$

とおく．$V_\lambda \neq \{0\}$ のとき，λ を (π, V) の**ウェイト**，V_λ を**ウェイト空間**，ゼロでない V_λ の元を**ウェイトベクトル**と呼ぶ．$\dim V_\lambda$ をウェイト λ の**重複度**という．$\mathfrak{g}$ の随伴表現のウェイトは，ルートおよびゼロであり，$\alpha \in \Delta$ に対するウェイト空間はルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$，ゼロに対するウェイト空間は $\mathfrak{h}$ になっている.

後に見るように（例題 9.7），$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現のウェイトは $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ $((m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2)$ の形をしている．また，例題9.4で見た $\lambda_1 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \lambda_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$ もある有限次元表現のウェイトになっている（例題9.9, 演習問題9.8）．λ_1, λ_2 を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の**基本ウェイト**と呼ぶ.

次の例題は，証明も含めて，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合の例題 8.7 と同様の結果である．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合と同じく表現を調べる上で非常に重要である.

例題 9.5
μ を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現 (π, V) のウェイト，$X \in \mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ とするとき，$\pi(X)$ は V_μ

を $V_{\mu+\alpha}$ に写すことを示せ.

解答 $v \in V_\mu$, $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して,

$$\begin{aligned}\pi(H)\pi(X)v &= \pi(X)\pi(H)v + \pi([H,X])v \\ &= \mu(H)\pi(X)v + \alpha(H)\pi(X)v \\ &= (\mu+\alpha)(H)\pi(X)v.\end{aligned}$$

したがって, $\pi(X)v \in V_{\mu+\alpha}$ である. ($\pi(X)v \neq 0$ ならば, $\pi(X)v$ はウェイト $\mu+\alpha$ を持つウェイトベクトルである.) □

例題 9.6
$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の任意の既約有限次元表現はウェイト空間の直和に分解されることを示せ.

解答 (π, V) を $\mathfrak{g}$ の既約有限次元表現とする. $\pi(H_1)$ は V 上少なくとも 1 つの固有値を持つ. $[H_1, H_2] = 0$ より $[\pi(H_1), \pi(H_2)] = 0$ である. したがって, $\pi(H_2)$ を $\pi(H_1)$ の 1 つの固有空間に制限するとその上の線形変換となり, 少なくとも 1 つの固有値を持つ. したがって, $\pi(H_1)$ と $\pi(H_2)$ の同時固有値, すなわちウェイトが少なくとも 1 つ存在する. したがって, W をすべてのウェイト空間の直和とすると, $W \neq \{0\}$ である.
また例題 9.5 より W は任意のルートベクトルの作用で不変である. 例題 9.2 (2) のルート空間分解より W は $\pi(\mathfrak{g})$ 不変である. したがって, W は V の $\pi(\mathfrak{g})$ 不変部分空間であり, V の既約性より $W = V$ である. □

例題 9.7
(π, V) を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現とする. 例題 9.3 (2) で見た $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ に同型な部分リー環への π の制限を調べることにより, π のウェイトは $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ (m_1, m_2 は整数) の形をしていることを示せ.

解答 $\alpha \in \Delta^+$ に対して, $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ で張られる $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型な部分リー環を $\mathfrak{g}(\alpha)$ と書く. π を $\mathfrak{g}(\alpha)$ 上に制限して $\mathfrak{g}(\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現と見なすと, これは既約であることは期待できないが, 有限次元表現である. $\alpha = e_1 - e_2$ について, $\mathfrak{sl}_2$-トリプル $\{H_1, E_{12}, E_{21}\}$ の作用を考えると, 定理 8.5 より $\pi(H_1)$ の固有値は整数である. $\mu = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ を π のウェイトとすると, $\pi(H_1)$ は固有値 $\mu(H_1) = m_1$ を持つから, $m_1 \in \mathbb{Z}$ である. 同様に $\alpha = e_2 - e_3$ について考えると, $m_2 \in \mathbb{Z}$ がわかる. □

【解説】 例題 9.5 は, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合 (120 ページ) と同じく, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイト空間はルートベクトルの作用で網目のようにつながっていることを示している. そして, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイトどうしの差は Δ の元の整数係数の一次結合になっている. また, 例題 9.7 より $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイトは $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ (m_1, $m_2 \in \mathbb{Z}$) の形をしている.

$$\Lambda_W = \{m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

を**ウェイト格子**と呼ぶ. また,

$$\Lambda_R = \{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 \,:\, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

を**ルート格子**と呼ぶ．例題 9.4 より $\Lambda_R \subset \Lambda_W$ である．これは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合に，$\mathrm{ad}\,H$ の固有値で生成される加群は $2\mathbb{Z}$ であり，既約有限次元表現のウェイトは格子 $\mathbb{Z}$ に含まれることの対応物である．

以下本書では，$\Lambda_W \simeq \mathbb{Z}^2$ を同一視して，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現のウェイトをしばしば (m_1, m_2) の形で書く．

演習問題 9.3

$\Lambda_W/\Lambda_R \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を示せ．

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合，既約有限次元表現 (π, V) のウェイト空間 V_μ は E の作用で $V_{\mu+2}$ に写され，「一番端の」ウェイト空間のベクトルに E を作用させるとゼロになる．既約有限次元表現はこの「一番端の」ウェイト，すなわち最高ウェイトにより分類されることを見た．$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合に同様のことを行いたい．そのためには「一番端の」ウェイトの意味を明らかにしなければならない．$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現のウェイト空間 V_μ に正ルート $\alpha \in \Delta^+$ に対するルートベクトルを作用させると $V_{\mu+\alpha}$ に写されるが，順次作用させていくと V は有限次元だからいつかゼロになる．ウェイト λ が「一番端」にあることを次のように定義する．ゼロでないベクトル $v \in V_\lambda$ が任意の $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta^+)$ の元の作用でゼロになる，すなわち，

$$\pi(E_{12})v = \pi(E_{23})v = \pi(E_{13})v = 0$$

が成り立つとき，v を**最高ウェイトベクトル**，λ を**最高ウェイト**という．上の考察より，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の任意の有限次元表現は最高ウェイトベクトルを持つ．

$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\lambda - \mu = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \dots\})$ と表せるとき，λ は μ **より高い**といい，$\lambda \succ \mu$ と書く．$\succ$ は $\mathfrak{h}^*$ 上の**半順序**を定める．λ, μ が表現のウェイトであっても，$\lambda \succ \mu$ と $\mu \succ \lambda$ のいずれも成り立たない場合がある．

後に見るように，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現 (π, V) は，ただ 1 つの最高ウェイトを持つ．既約有限次元表現のウェイト λ が最高ウェイトであることと，任意のウェイト μ に対して $\lambda \succ \mu$ であることは同値である（演習問題 9.4，演習問題 9.13 参照）．

演習問題 9.4

π を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現とする．π のウェイト λ が $\succ$ に関して最高，すなわち，π の任意のウェイト μ に対して $\lambda \succ \mu$ を満たすとき，λ は最高ウェイトであることを示せ．

例題 9.8

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の随伴表現について次の問いに答えよ．

(1) すべてのウェイト μ を (m_1, m_2) の形で書け．

(2) ウェイト λ, μ で $\lambda \succ \mu$ と $\mu \succ \lambda$ のいずれも成り立たない例を挙げよ．

(3) $\succ$ について最高のウェイトを求めよ．

(4) 既約であることを示せ．

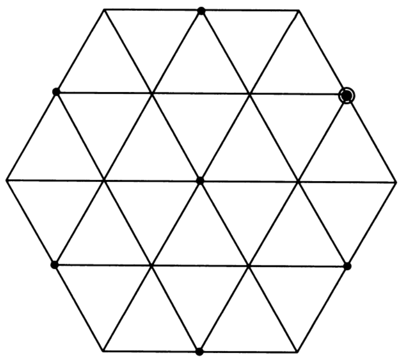


図 9.2 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の随伴表現のウェイト.

(5) すべてのウェイトをウェイト格子に図示せよ.

解答 (1) 随伴表現のゼロでないウェイトは，ルートのことである．$\alpha_1 = (2,-1)$, $\alpha_2 = (-1,2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = (1,1)$, $-\alpha_1 = (-2,1)$, $-\alpha_2 = (1,-2)$, $-\alpha_1 - \alpha_2 = (-1,-1)$．ゼロウェイトは $(0,0)$.
(2) $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$.
(3) $e_1 - e_3 = (1,1)$.（他のすべてのウェイトとの差が Δ^+ の元の和であることは容易に確かめられる．(5) のウェイト図形で見るとわかりやすい.）
(4) ルートベクトルの性質（例題 9.3）より確かめられる．
(5) 図 9.2 の直線の交点がルート格子の点，黒丸の点が $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の随伴表現のウェイト（例題 9.2 の図と同じ配置），黒丸を丸で囲んだウェイト $e_1 - e_3$ が最高ウェイトである．（ウェイト格子は無限に広がっており，一部だけを図示している.） □

8.1 節で考察した $SU(2)$ の自然表現，および斉次多項式の空間上の表現は，$SU(3)$ の場合にも同様に定義することができる．$SU(2)$ の場合と異なり，これらの表現だけでは $SU(3)$ の既約有限次元表現は尽くされないが，表現の例として見ておこう．

例題 9.9
$\Pi(g)\boldsymbol{z} = g\boldsymbol{z}$ ($g \in SU(3)$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^3$) を $SU(3)$ の**自然表現**と呼ぶ．自然表現の微分表現のウェイトを求め，図示せよ．また $\succ$ について最高のウェイトを求めよ．

解答

$$d\Pi(X)\boldsymbol{z} = \frac{d}{dt}(\exp tX)\boldsymbol{z}\bigg|_{t=0} = X\boldsymbol{z}.$$

$d\Pi(H_i)$ の固有値を m_i $(i=1,2)$ とすると，$(m_1,m_2) = (1,0), (-1,1), (0,-1)$，対応するウェイトベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{e}_1 = {}^t(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = {}^t(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = {}^t(0,0,1)$ である．$\succ$ について最高のウェイトは $(1,0)$ である（すなわち $\lambda_1 \in \Lambda_W$）．図 9.3 の 3 つの黒丸がウェイトで，さらに丸で囲んだウェイト λ_1 が $\succ$ について最高のウェイトである． □

注意 9.1
$SU(3)$ の自然表現の微分表現を複素線形に拡張したものは，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の自然表現である．

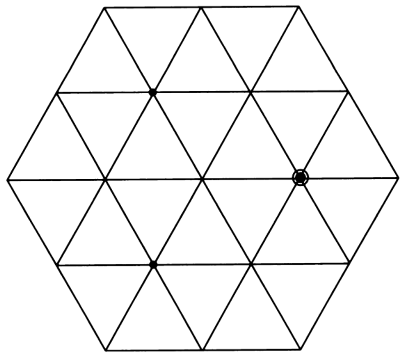


図 9.3　$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の自然表現のウェイト.

【解説】　表現のウェイトを図示したものを**ウェイト図形**と呼ぶ.

演習問題 9.5

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の自然表現は，既約であり，その最高ウェイトは λ_1 であることを示せ.

定義 9.1

リー環 $\mathfrak{g}$ の表現 (π, V) の**双対表現**（または**反傾表現**）π^* を

$$\pi^* : \mathfrak{g} \;\to\; \mathfrak{gl}(V^*): \quad X \;\mapsto\; -{}^t\pi(X)$$

により定められる V の双対空間 V^* 上の $\mathfrak{g}$ の表現とする.

閉線形群 G の表現 (Π, V) の **双対表現**（または**反傾表現**）Π^* を

$$\Pi^* : \mathfrak{g} \;\to\; GL(V^*): \quad x \;\mapsto\; {}^t\Pi(x)^{-1}$$

により定められる V の双対空間 V^* 上の G の表現とする.

演習問題 9.6

リー環または閉線形群の表現の双対表現が表現の定義を満たすことを確かめよ．また，閉線形群の表現 Π の双対表現の微分表現は Π の微分表現の双対表現であることを示せ.

例題 9.10

$(\rho_V, V), (\rho_U, U)$ を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現とするとき，次を示せ.

(1) α, β がそれぞれ ρ_V, ρ_U のウェイトならば，$\alpha+\beta$ は $\rho_V\otimes\rho_U$ のウェイトである.

(2) $v\in V, u\in U$ をそれぞれウェイト α, β を持つ ρ_V, ρ_U の最高ウェイトベクトルとするとき，$v\otimes u\in V\otimes U$ はウェイト $\alpha+\beta$ を持つ最高ウェイトベクトルである.

解答　(1) $H\in\mathfrak{h}, v\in V_\alpha, u\in U_\beta$ とすると，

$$\begin{aligned}(\rho_V\otimes\rho_U)(H)(v\otimes u) &= \rho_V(H)v\otimes u + v\otimes\rho_U(H)u\\ &= \alpha(H)v\otimes u + v\otimes\beta(H)u\\ &= (\alpha+\beta)(H)(v\otimes u)\end{aligned}$$

より，$v \otimes u \in V \otimes U$ は $\alpha + \beta$ をウェイトに持つウェイトベクトルである．
(2) 上の (1) より $v \otimes u$ は $\alpha + \beta$ をウェイトに持つウェイトベクトルである．v, u は最高ウェイトベクトルだから，さらに，$\rho_V(X)v = 0$, $\rho_U(X)u = 0$ ($X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^+$) を満たす．これより，

$$(\rho_V \otimes \rho_U)(X)(v \otimes u) = \rho_V(X)v \otimes u + v \otimes \rho_U(X)u = 0 \otimes u + v \otimes 0 = 0 \otimes 0.$$

したがって，$v \otimes u$ はウェイト $\alpha + \beta$ を持つ最高ウェイトベクトルである． □

演習問題 9.7

(ρ_V, V), (ρ_U, U) を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の有限次元表現とするとき，次を示せ．
(1) α が ρ_V と ρ_U の両方のウェイトであるとき，α は $\rho_V \oplus \rho_U$ のウェイトである．
(2) α が ρ_V のウェイトならば $-\alpha$ は ρ_V^* のウェイトである．

演習問題 9.8

$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の自然表現の双対表現のウェイトを図示せよ．最高ウェイトは λ_2 であることを示せ．

λ_1 または λ_2（成分で書くと $(1,0)$ または $(0,1)$）を最高ウェイトとする 3 次元既約表現を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の**基本表現**と呼ぶ．

例題 9.11

n を 0 以上の整数とし，複素数を係数とする z_1, z_2, z_3 の n 次斉次多項式全体の集合を V_n とする．$\boldsymbol{z} = {}^t(z_1, z_2, z_3)$ とし，$SU(3)$ の V_n 上の表現 Π_n を

$$[\Pi_n(g)f](\boldsymbol{z}) = f(g^{-1}\boldsymbol{z}) \quad (g \in SU(3),\ f \in V_n)$$

により定義する．V_n の次元を求めよ．また，$(d\Pi_n, V_n)$ のウェイトをすべて求めよ．$\succ$ について最高のウェイトは $(0, n)$ であることを示せ．$n = 2$ のときウエイト図形をかけ．

解答 $d\Pi_n = \pi_n$ と書く．$\pi_n(H_i)$ の固有値を m_i $(i = 1, 2)$ とする．V_n の基底は $z_1^i z_2^j z_3^k$ $(i, j, k \geq 0,\ i + j + k = n)$ で，$\dim V_n = (n+2)(n+1)/2$ である．$V_0 = \mathbb{C}$ で $\Pi_0(g)c = c$ $(g \in SU(3),\ c \in \mathbb{C})$，したがって，$\pi_0 \equiv 0$，特に $(m_1, m_2) = (0, 0)$．一般に，

$$\begin{aligned}
\pi_n(H_1)(z_1^i z_2^j z_3^k) &= \frac{d}{dt}\Pi_n(\exp tH_1)(z_1^i z_2^j z_3^k)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{-t}z_1)^i(e^t z_2)^j z_3^k\Big|_{t=0} \\
&= (j - i) z_1^i z_2^j z_3^k, \\
\pi_n(H_2)(z_1^i z_2^j z_3^k) &= \frac{d}{dt}\Pi_n(\exp tH_2)(z_1^i z_2^j z_3^k)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} z_1^i (e^{-t}z_2)^j (e^t z_3)^k\Big|_{t=0} \\
&= (k - j) z_1^i z_2^j z_3^k.
\end{aligned}$$

したがって，$(m_1, m_2) = (j - i, k - j)$ $(i, j, k \geq 0,\ i + j + k = n)$ である．(たとえば V_1 の場合 $(m_1, m_2) = (0, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$ である．)

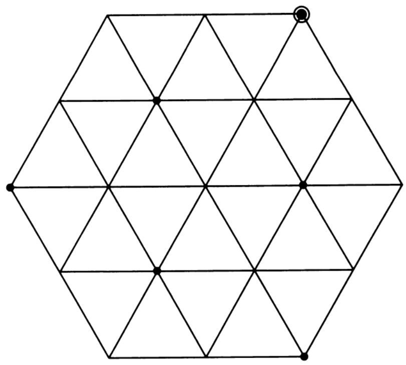


図 9.4　$d\Pi_2$ のウェイト.

$\succ$ について最高のウェイトは $(0,n)$ である．π_2 のウェイト図形は図 9.4 である（丸で囲んだのが $\succ$ について最高のウェイト $2\lambda_2$）. □

【解説】　例題 9.11 の π_n は $V \simeq \mathbb{C}^3$ 上の自然表現の双対表現 V^* の n 次対称テンソル積表現 $\mathrm{Sym}^n V^*$ と同型である.

対称テンソル積について簡単に説明しておく（詳細は [33], [22] を参照のこと）.

2 つの複素ベクトル空間のテンソル積，そして $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現のテンソル積について，8.4 節で述べた．一般にベクトル空間 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ のテンソル積 $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$ が定義される．ベクトル空間 V の k 個のコピーのテンソル積を $T^k V$ と書き，V の k 階のテンソル積と呼ぶ.

$$T^k V = V \otimes \cdots \otimes V \quad (k \text{ 個のテンソル積}).$$

$T^k V$ の元 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ $(v_j \in V)$ への置換 $\sigma \in S_k$ の作用 P_σ を

$$P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$$

により定めると，P_σ は $T^k V$ 上の線形変換に拡張される.

$$\mathrm{Sym}^k V = \{t \in T^k V \,:\, P_\sigma(t) = t \ ({}^\forall \sigma \in S_k)\},$$
$$\bigwedge^k V = \{t \in T^k V \,:\, P_\sigma(t) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, t \ ({}^\forall \sigma \in S_k)\}$$

とおき，$\mathrm{Sym}^k V$ を V の k 階の**対称テンソル積**，$\bigwedge^k V$ を V の k 階の**交代テンソル積**と呼ぶ．V の次元を n とすると，$T^k V, \mathrm{Sym}^k V, \bigwedge^k V$ の次元は，それぞれ $n^k, \binom{k+n-1}{k}, \binom{n}{k}$ である.

(Π, V) を閉線形群 G の表現とするとき，V の k 階テンソル積 $T^k V$ 上の G の表現 $\Pi^{\otimes k}$ は

$$\Pi^{\otimes k}(x)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \Pi(x)v_1 \otimes \cdots \otimes \Pi(x)v_k \quad (v_1, \ldots, v_k \in V,\, x \in G)$$

により定義される．また，(π, V) をリー環 $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，V の k 階テンソル積 $T^k V$ 上の $\mathfrak{g}$ の表現 $\pi^{\otimes k}$ は

$$\pi^{\otimes k}(X)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \pi(X)v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$$
$$+ v_1 \otimes \pi(X)v_2 \otimes \cdots v_k + \cdots + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes \pi(X)v_k$$
$$(v_1, \ldots, v_k \in V,\ X \in \mathfrak{g})$$

により定義される．$\mathrm{Sym}^k V$, $\bigwedge^k V$ は $T^k V$ の部分表現である．

演習問題 9.9

(π, V) をリー環 $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$\mathrm{Sym}^k V$, $\bigwedge^k V$ は $T^k V$ の部分表現であることを示せ．

演習問題 9.10

$V \simeq \mathbb{C}^3$ を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の自然表現とするとき，$\mathrm{Sym}^2 V$ および $\mathrm{Sym}^2 V^*$ のウェイト図形を描け．

演習問題 9.11

V を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の自然表現とするとき，$\bigwedge^k V$ の最高ウェイトは $k=1$ のとき $(1,0)$，$k=2$ のとき $(0,1)$，$k=3$ のとき $(0,0)$ であることを示せ．

演習問題 9.12

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，次の 2 条件は同値であることを示せ．

(1) $\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ $(m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z})$.

(2) $T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) : \theta_j \in \mathbb{R}\ (j=1,2,3),\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0\}$ の 1 次元表現 ξ_λ であって，任意の $H \in \mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ に対して，$\xi_\lambda(\exp H) = e^{\lambda(H)}$ が成り立つものが存在する．

（T は $SU(3)$ の極大トーラスである（例題 9.14，命題 10.2 参照）．）

9.3 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現

第 8 章で $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現の同値類は非負整数（最高ウェイト）でパラメーターづけられることを見た．この節では $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現について類似の結果を与える（定理 9.2）．

> **例題 9.12**
>
> (π, V) を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現とするとき，π の最高ウェイトは $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ (m_1, m_2 は非負整数）の形をしていることを示せ．

解答 m_1, m_2 が整数であることは例題 9.7 で見た．非負であることも同じ考え方で示される．実際，$v \in V$ を最高ウェイトベクトル，つまり $\pi(E_{12})v = \pi(E_{23})v = 0$ を満たすベクトルとするとき，$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型な部分リー環 $\langle H_1, E_{12}, E_{21} \rangle$, $\langle H_2, E_{23}, E_{32} \rangle$ への π の制限を考えると，v で生成される表現はそれぞれ m_1, m_2 を最高ウェイトとする $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現である．したがって，m_1, m_2 は非負整数である． □

【解説】 $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ (m_1, m_2 は整数）の形のウェイトを**整ウェイト**，$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ (m_1, m_2 は非負整数）の形のウェイトを**支配的整ウェイト**と呼ぶ．

命題 9.1

(i) (π, V) を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の有限次元表現，$0 \neq v \in V$ を最高ウェイトベクトルとするとき，$\pi(E_{21})$, $\pi(E_{32})$, $\pi(E_{31})$ の任意回数の合成を v に作用して得られるベクトルたちで張られる V の部分空間 W は，$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現である．

(ii) $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現の最高ウェイトベクトルは定数倍を除いて一意である．

(iii) $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の 2 つの既約有限次元表現が同じ最高ウェイトを持つならば，それらの表現は同値である．

[証明] (i) v のウェイトを λ とする．$\pi(E_{21}), \pi(E_{32})$ を計 n 回 v に作用して得られるベクトルで生成されるベクトル空間を W_n とすると，$E_{31} = [E_{32}, E_{21}]$ だから，$W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} W_n$ である．

$\pi(E_{12})$ および $\pi(E_{23})$ は W_n を W_{n-1} に写すことを数学的帰納法により示す．$n=1$ のとき，

$$\pi(E_{12})\pi(E_{21})v = \pi(E_{21})\pi(E_{12})v + \pi([E_{12}, E_{21}])v = \lambda(H_1)v \in W_0,$$

$$\pi(E_{23})\pi(E_{21})v = \pi(E_{21})\pi(E_{23})v + \pi([E_{23}, E_{21}])v = 0 \in W_0.$$

$\pi(E_{32})v$ についても $\pi(E_{12})$ および $\pi(E_{23})$ により W_0 に写されることが同様に示される．W_n の元は $w \in W_{n-1}$ を $\pi(E_{21})$ または $\pi(E_{32})$ で写したもので生成される．帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}\pi(E_{12})\pi(E_{21})w &= \pi(E_{21})\pi(E_{12})w + \pi([E_{12}, E_{21}])w \\ &\qquad \in \pi(E_{21})W_{n-2} + \pi(H_1)w \subset W_{n-1}, \\ \pi(E_{23})\pi(E_{21})w &= \pi(E_{21})\pi(E_{23})w + \pi([E_{23}, E_{21}])w \\ &\qquad \in \pi(E_{21})W_{n-2} \subset W_{n-1},\end{aligned}$$

$\pi(E_{32})w$ についても $\pi(E_{12})$ および $\pi(E_{23})$ により W_{n-1} に写されることが同様に示される．

したがって，W は $\pi(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}))$ で不変である．すなわち W は $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の表現になる．W は既約である．実際，有限次元表現の完全可約性（定理 8.10）より W は既約有限次元表現の直和 $W = \oplus_i W_i$ に分解する．例題 9.6 より，それぞれの W_i はウェイト空間の直和に分解される．したがって，W はウェイト空間の直和に分解される．最高ウェイト λ を持つ W のウェイト空間は v を基底とする 1 次元空間だから，v はどれか 1 つの W_i に含まれる．W の作り方から，$W \subset W_i$，したがって，$W = W_i$ は既約である．

(ii) V が既約ならば，上の (i) の証明でとった最高ウェイトベクトルは一意である．この事実はこれまでの議論の系であるが，理解の確認のため演習問題とする（演習問題 9.13）．

(iii) $(\pi_V, V), (\pi_W, W)$ を同じ最高ウェイト λ を持つ $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現，$v \in V$, $w \in W$ をそれぞれ最高ウェイトベクトルとする．(v, w) は $V \oplus W$ の最高ウェイトベクトルである．$U \subset V \oplus W$ を (v, w) により生成される既約有限次元表現とする．射影

$$\begin{aligned} p_V &: U \to V, \\ p_W &: U \to W \end{aligned}$$

は明らかに $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の作用を保つ線形写像，すなわち絡作用素である．すなわち，任意の $X \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ に対して，U 上の作用素の関係式

$$\pi_V \circ p_V(X) = p_V \circ (\pi_V \oplus \pi_W)(X),$$
$$\pi_W \circ p_W(X) = p_W \circ (\pi_V \oplus \pi_W)(X)$$

が成り立つ．$(v,w) \in U$ だから p_V も p_W もゼロ写像でない．U, V, W は既約だから，シューアの補題（定理 8.14）より，p_V, p_W はいずれも表現の同型写像であり，したがって，$V \simeq U \simeq W$ である． □

演習問題 9.13

(π, V) を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現，ゼロでないベクトル $v \in V$ が

$$\pi(E_{12})v = \pi(E_{23})v = \pi(E_{13})v = 0$$

を満たすならば，$v \in V_\mu$ となる $\mu \in \mathfrak{h}^*$ がただ 1 つ存在して，$\dim V_\mu = 1$ が成り立つことを示せ．また，既約有限次元表現の最高ウェイトは，$\succ$ に関して最高であることを示せ．

注意 9.2

命題 9.1 や第 8 章において，$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現 (π, V) に対して，$\pi(X)$ $(X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を繰り返し合成した作用を考えた．$X_1, \ldots, X_m$ を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の基底とするとき，$X_1^{k_1} \ldots X_m^{k_m}$ $(k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の形をした元で生成される非可換な代数 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ が定義され，$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の表現は $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の表現に拡張される．$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ をリー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の**普遍包絡環**という．これは重要な対象だが本書では扱わない．[13], [15], [16], [38] 等を参照されたい．

例題 9.13

$V \simeq \mathbb{C}^3$ を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の自然表現，$v \in V, v^* \in V^*$ を最高ウェイトベクトルとする．非負整数 m_1, m_2 に対して，

$$v_{m_1,m_2} = v \otimes \cdots \otimes v \otimes v^* \otimes \cdots \otimes v^* \in \mathrm{Sym}^{m_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{m_2} V^*$$

は，最高ウェイト $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$ を持つ最高ウェイトベクトルであることを示せ．

解答　$v \in V, v^* \in V^*$ を最高ウェイトベクトル，すなわち，

$$Hv = \lambda_1(H)v, \quad Hv^* = \lambda_2(H)v^* \ (H \in \mathfrak{h}), \quad Xv = Xv^* = 0 \ (X \in \mathfrak{g}_\alpha, \ \alpha \in \Delta^+)$$

を満たすゼロでないベクトルとする．テンソル積表現の定義より，ベクトル v_{m_1,m_2} は，

$$Hv_{m_1,m_2} = (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2)(H)v_{m_1,m_2}, \quad Xv_{m_1,m_2} = 0 \ (X \in \mathfrak{g}_\alpha, \ \alpha \in \Delta^+)$$

を満たす.（例題 9.10 と同様に示される.）したがって，$v_{m_1,m_2} \in \mathrm{Sym}^{m_1} V \otimes \mathrm{Sym}^{m_2} V^*$ は最高ウェイトベクトルである． □

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現についてこの節で得られた結果をまとめておく.

定理 9.2

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現に対してその最高ウェイトを対応させる写像は, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現の同値類全体の集合から $\mathfrak{h}$ 上の支配的整ウェイト全体の集合の上への全単射を与える.

定理 9.2 は $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ に対する**最高ウェイト定理**と呼ばれる. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合の最高ウェイト定理は定理 8.6 である. 最高ウェイト定理は, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (n は正の整数), さらに一般に複素単純リー環に対して拡張される.

演習問題 9.14

$V \simeq \mathbb{C}^3$ を $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の自然表現とする.

(1) 最高ウェイト $(1,1)$ を持つ $V \otimes V^*$ の既約な部分表現のウェイト空間をすべて決定し, 表現の次元を求めよ.

(2) 最高ウェイト $(2,0)$ を持つ $V \otimes V$ の既約な部分表現のウェイト空間をすべて決定し, 表現の次元を求めよ.

9.4 ワイル群

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイト図形は, $\mathbb{Z}$ の有限部分集合で原点に関して対称であった. $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイト図形の持つ対称性について調べる.

$SU(3)$ の随伴表現 $\mathrm{Ad}(x)\,(x \in SU(3))$ は $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(3)_{\mathbb{C}}$ の線形変換である. $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の部分空間

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}\,(x_1, x_2, x_3) \,:\, x_j \in \mathbb{C},\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

を保つ随伴作用 $\mathrm{Ad}(x)$ が定める $\mathfrak{h}$ の線形変換全体のなす群を $SU(3)$ の**ワイル群**という. この節ではワイル群について調べる.

この節を通して $G = SU(3)$ とする. G における $\mathfrak{h}$ の正規化群, 中心化群をそれぞれ

$$N_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G \,:\, \mathrm{Ad}(x)H \in \mathfrak{h}\ ({}^{\forall}H \in \mathfrak{h})\},$$
$$Z_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G \,:\, \mathrm{Ad}(x)H = H\ ({}^{\forall}H \in \mathfrak{h})\}$$

とおく.

例題 9.14

$G = SU(3)$ について次の問いに答えよ.

(1) $N_G(\mathfrak{h})$ と $Z_G(\mathfrak{h})$ は G の部分群であることを示せ.

(2) $Z_G(\mathfrak{h})$ は $N_G(\mathfrak{h})$ の正規部分群であることを示せ.

(3) G に含まれる対角行列全体のなす部分群を T とするとき, $Z_G(\mathfrak{h}) = T$ を示せ.

(4) 同型 $T \simeq \mathbb{T}^2$ を示せ.

解答 (1) $\mathrm{Ad}(x)H = xHx^{-1}$ より，部分群の定義（2つの部分集合が逆元をとる操作と積をとる操作で閉じていること）を満たすことは容易に確かめられる．
(2) $x \in Z_G(\mathfrak{h})$, $y \in N_G(\mathfrak{h})$, $H \in \mathfrak{h}$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(yxy^{-1})H &= \mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(x)\mathrm{Ad}(y^{-1})H \\ &= \mathrm{Ad}(y)\mathrm{Ad}(y^{-1})H \\ &= \mathrm{Ad}(yy^{-1})H = H\end{aligned}$$

より，$yxy^{-1} \in Z_G(\mathfrak{h})$ となる．
(3) 対角行列の積は可換だから，$T \subset Z_G(\mathfrak{h})$ が成り立つ．
逆に $x \in Z_G(\mathfrak{h})$，すなわち任意の $H \in \mathfrak{h}$ に対して $xH = Hx$ が成り立つとする．$\mathfrak{h}$ はトレースがゼロの3次対角行列全体のなす2次元ベクトル空間だが，単位行列 $\mathbf{1}_3$ は任意の行列と可換だから,（トレースがゼロとは限らない）任意の3次対角行列 H に対して $xH = Hx$ が成り立つ．H として E_{jj}（(j,j) 成分が1でその他の成分はすべてゼロの行列）をとれば，x が対角行列であることが容易にわかる．
(4) $T \ni \mathrm{diag}\,(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$ が同型対応を与える． □

【解説】 (4) より T は2次元トーラスと同型であり，(3) より T' が $T \subset T' \subset SU(3)$ を満たす可換群ならば，$T' = T$ であることが従う．このことから，T は $SU(3)$ の**極大トーラス**と呼ばれる．

定義 9.2
$W = N_G(\mathfrak{h})/Z_G(\mathfrak{h}) = N_G(\mathfrak{h})/T$ を $G = SU(3)$ の**ワイル群**と呼ぶ．ワイル群は $\mathfrak{h}$ の線形変換 $\mathrm{Ad}(x)\,(x \in N_G(\mathfrak{h}))$ 全体のなす群とみなすことができる．

$\{1,2,3\}$ の置換（$\{1,2,3\}$ からそれ自身の上への全単射）全体の集合 S_3 は写像の合成により積を定めると群をなす．これを**3次対称群**という．$\sigma \in S_3$，$(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

と定義する．また $\sigma \in S_3$ に対して，3次正方行列 $\pi_0(\sigma)$ を

$$\pi_0(\sigma)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ x_{\sigma^{-1}(3)} \end{pmatrix}$$

により定義する．

例題 9.15
(1) S_3 は $\mathfrak{h}$ に忠実に作用することを示せ．
(2) $\pi_0(S_3) = \{\pi_0(\sigma) : \sigma \in S_3\}$ の元をすべて書き出せ．また $\pi_0(S_3)$ は行列の積に関して S_3 と同型な群をなすことを示せ．

解答 (1) e（単位元，つまり恒等写像）は $e\cdot(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ を満たす．σ, $\tau \in S_3$

に対して，

$$\begin{aligned}\sigma\cdot(\tau\cdot(x_1,x_2,x_3)) &= \sigma\cdot(x_{\tau^{-1}(1)},x_{\tau^{-1}(2)},x_{\tau^{-1}(3)})\\ &= (x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(1)},x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(2)},x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(3)})\\ &= (x_{(\sigma\tau)^{-1}(1)},x_{(\sigma\tau)^{-1}(2)},x_{(\sigma\tau)^{-1}(3)})\\ &= \sigma\tau\cdot(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

したがって，S_3 は $\mathfrak{h}$ に作用する．$\sigma\cdot H=H$ となるのは，$H=(x,x,x)$ のときだが，$\mathrm{Tr}\,H=3x=0$ より，$H=0$，したがって作用は忠実である．

(2) (i,j) により i と j の互換を表す．

$$\pi_0(e)=\mathbf{1}_3,\quad \pi_0((1,2))=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \pi_0((2,3))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\pi_0((1,3))=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}\ \text{のとき}\ \pi_0(\sigma)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}\ \text{のとき}\ \pi_0(\sigma)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$\pi_0(S_3)\simeq S_3$ は定義から容易にわかる．(あるいは上で求めた行列を用いて直接確かめてもよい．) □

【解説】 $\pi_0(S_3)$ は各行に 1 つだけ 1 がありその他はゼロ，各列に 1 つだけ 1 がありその他はゼロである行列からなる．このような行列を**置換行列**という．単射準同型 $\pi_0: S_3\to GL(3,\mathbb{C})$ を S_3 の**自然表現**という．

例題 9.16

(1) $1\le j\le 3$ に対して $E_j=E_{jj}$ ((j,j) 成分が 1 でその他の成分がすべてゼロの行列) とおくと，任意の $x\in N_G(\mathfrak{h})$ に対してある $\sigma\in S_3$ が存在して，$xE_jx^{-1}=E_{\sigma^{-1}(j)}$ $(1\le j\le 3)$ となることを示せ．

(2) $\{\mathrm{sgn}\,\sigma\,\pi_0(\sigma) : \sigma\in S_3\}\subset N_G(\mathfrak{h})$ および

$$\pi_0(\sigma)\mathrm{diag}(x_1,x_2,x_3)\pi_0(\sigma)^{-1}=\mathrm{diag}(x_{\sigma^{-1}(1)},x_{\sigma^{-1}(2)},x_{\sigma^{-1}(3)})\quad(\sigma\in S_3)$$

を示せ．

(3) 群の同型 $W\simeq S_3$ を示せ．

解答 (1) $x\in N_G(\mathfrak{h})$ とする．xE_jx^{-1} は E_j と同じ固有値 $1,0,0$ を持つ対角行列であるから，$\{1,2,3\}$ からそれ自身への写像 τ があって，$xE_jx^{-1}=E_{\tau(j)}$ $(1\le j\le 3)$ が成り立つ．$H\mapsto xHx^{-1}$ は単射だから，τ は置換である．

(2) $\pi_0(S_3)$ の元は標準基底を並べ替えた行列だから，$\pi_0(S_3)\subset O(3)$ であり，行列式の

値は対応する置換の符号だから，符号をかけると $SO(3) \subset SU(3)$ の元になる．
その $\mathfrak{h}$ 上の随伴作用が S_3 の $\mathfrak{h}$ への作用と一致することは，$\pi_0(\sigma)$ の定義からわかる．
（それぞれの行列について直接確かめてもよい．）
(3) ワイル群 W の定義と上の (1), (2) より従う． □

【解説】 (2) の $\{\operatorname{sgn}\sigma\,\pi_0(\sigma) : \sigma \in S_3\}$ は W と同型な $N_G(\mathfrak{h})$ の部分群になっている．
ワイル群 W の $\mathfrak{h}^*$ への作用を

$$w\mu(H) = \mu(w^{-1}H) \quad (w \in W, \mu \in \mathfrak{h}^*, H \in \mathfrak{h})$$

により定義する．

演習問題 9.15

上で定義した W の $\mathfrak{h}^*$ への作用と W の $\mathfrak{h}$ への作用（定義 9.2，例題 9.16）は，例題 9.1 の同一視 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ の下で一致することを示せ．

例題 9.17

(1) $\alpha \in \Delta$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $w \in W$ であるとき，$wX \in \mathfrak{g}_{w\alpha}$，したがって $w\alpha \in \Delta$ であることを示せ．

(2) π を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の有限次元表現，μ を π のウェイトとするとき，$w\mu$ は π のウェイトであることを示せ．また，μ と $w\mu$ の重複度（つまりウェイト空間の次元）は等しいことを示せ．

解答 ルートは随伴表現のゼロでないウェイトであるから，(1) は (2) より従う．(2) を示す．(π, V) を $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の有限次元表現，$v \in V$ をウェイト $\mu \in \mathfrak{h}^*$ を持つウェイトベクトルとする．Π を $d\Pi = \pi$ を満たす $G = SU(3)$ の表現とする．$\bar{w} \in N_G(\mathfrak{h})$, $H \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi(H)\Pi(\bar{w})v &= \Pi(\bar{w})\Pi(\bar{w}^{-1})\pi(H)\Pi(\bar{w})v = \Pi(\bar{w})\pi(\bar{w}^{-1}H\bar{w})v \\ &= \mu(\bar{w}^{-1}H\bar{w})\Pi(\bar{w})v = w\mu(H)\Pi(\bar{w})v,\end{aligned}$$

したがって，$w \in W$ に対して，$\Pi(\bar{w})v$ はウェイト $w\mu$ を持つウェイトベクトルである．$v \mapsto \Pi(\bar{w})v$ は，V_μ から $V_{w\mu}$ の上への線形写像で，その逆写像は $\Pi(\bar{w})^{-1}$ で与えられる．したがって，μ と $w\mu$ の重複度は等しい． □

例題 9.18

$SU(3)$ のワイル群は，

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \sqrt{-1}\mathfrak{t}^* = \{y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 : y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$$

に，原点を通り $\alpha \in \Delta$ と垂直な直線に関する鏡映（線対称移動）により生成される群として作用することを示せ．

解答 例題 9.15，例題 9.16 より，ワイル群 $W \simeq S_3$ は $\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ $(\sigma \in S_3, j = 1, 2, 3)$ により作用し，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の線形変換を与える．$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の基底 $\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3$ に対す

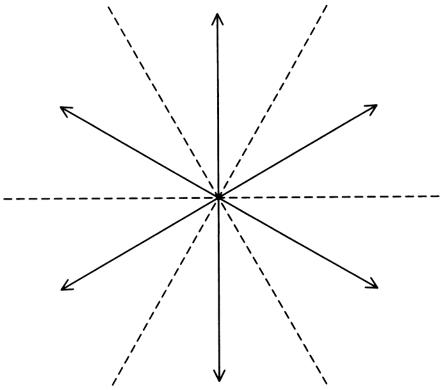


図 9.5 ルートに垂直な直線（点線）.

る S_3 の互換の作用を調べる.

$$(1,2)\cdot\alpha_1 = e_2 - e_1 = -\alpha_1,$$

$$(1,2)\cdot\alpha_2 = e_3 - e_2 = -\alpha_1 - \alpha_2$$

より，互換 $(1,2)$（に対応するワイル群の元）は，原点を通り α_1 と垂直な直線に関する鏡映として作用することがわかる．一般に互換 (i,j) $(1 \le i < j \le 3)$ は，原点を通り $e_i - e_j \in \Delta^+$ と垂直な直線に関する鏡映として作用することがわかる．S_3 は互換により生成されるから，ワイル群は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}^2$ 上の原点を通るルートと垂直な直線に関する鏡映により生成される群として作用する. □

【解説】 $\alpha \in \Delta$ に対して，原点を通り α と垂直な直線に関する $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ の鏡映変換を s_α と書く．ワイル群 W の $\sqrt{-1}\mathfrak{t}^*$ への作用は忠実であるから，$W \simeq S_3$ を $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}$ により生成される鏡映群と同一視する．本書では，ワイル群を $SU(3)$ を用いて定義したが，s_{α_1} と s_{α_2} により生成される群

$$W = \{e,\, s_{\alpha_1},\, s_{\alpha_2},\, s_{\alpha_1}s_{\alpha_2},\, s_{\alpha_2}s_{\alpha_1},\, s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}\}$$

としてワイル群を代数的に定義することもできる．鏡映（線対称移動）を行う，ルートに垂直な直線を図 9.5 に点線で示す．これらの直線を**ワイル群の壁**という.

演習問題 9.16

巡回置換 $(1,2,3) \in S_3 \simeq W$ による α_1, α_2 の像をそれぞれ求めよ.

演習問題 9.17

$\alpha \in \Delta,\ \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して，

$$s_\alpha\lambda = \lambda - \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$$

であることを示せ.

例題 9.19

任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して，$\langle w\lambda,\alpha\rangle \ge 0$ $({}^\forall\alpha \in \Delta^+)$ となるような $w \in W$ が存在する

ことを示せ.

解答 $\lambda = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_1 + c_2 + c_3 = 0)$ と表せる．条件 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ $({}^\forall \alpha \in \Delta^+)$ は $c_1 \geq c_2 \geq c_3$ と同値である．また，ワイル群 $W \simeq S_3$ は $w\lambda = c_{w^{-1}(1)}e_1 + c_{w^{-1}(2)}e_2 + c_{w^{-1}(3)}e_3$ により作用する．したがって，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して，$c_{w^{-1}(1)} \geq c_{w^{-1}(2)} \geq c_{w^{-1}(3)}$ となるように c_1, c_2, c_3 を並べ替える w をとればよい. □

演習問題 9.18

$\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ $({}^\forall \alpha \in \Delta^+)$ となる $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の存在範囲を図示せよ.

例題 9.20

(π, V) を最高ウェイト λ を持つ $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現とするとき，π の任意のウェイト μ に対して $|\mu| \leq |\lambda|$ であることを示せ.

解答 μ が π のウェイトならば，例題 9.17 より $w \in W$ に対して $w\mu$ は π のウェイトであり，$|w\mu| = |\mu|$ であるから，例題 9.19 より $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ $({}^\forall \alpha \in \Delta^+)$ と仮定して一般性を失わない.

λ は最高ウェイトだから，$\mu = \lambda - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2$ $(n_1, n_2 \geq 0)$ の形をしている．このとき，

$$\begin{aligned}\langle \mu, \mu \rangle &= \langle \lambda - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2, \mu \rangle \\ &= \langle \lambda, \mu \rangle - n_1\langle \mu, \alpha_1 \rangle - n_2\langle \mu, \alpha_2 \rangle \\ &\leq \langle \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda, \lambda - n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 \rangle \\ &= \langle \lambda, \lambda \rangle - n_1\langle \lambda, \alpha_1 \rangle - n_2\langle \lambda, \alpha_2 \rangle \leq \langle \lambda, \lambda \rangle.\end{aligned}$$

□

定義 9.3

ベクトル空間 V の有限部分集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の**凸包**とは，

$$\{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n : c_j \geq 0\,(1 \leq j \leq n), c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1\}$$

のことをいう．すなわち，与えられた有限集合を含む最小の凸集合が凸包である.

既約有限次元表現のウェイトの集合はワイル群による対称性を持つ.

定理 9.3

$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現 (π, V) の最高ウェイトを λ とするとき，$\mu \in \mathfrak{h}^*$ が π のウェイトであるのは，1) μ が $W\lambda$ の $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}^2$ における凸包に含まれ，2) $\lambda - \mu$ が α_1 と α_2 の整数係数の一次結合であるとき，そしてそのときに限る.

[証明] 証明の概略を述べる.

$W \simeq S_3$ の元の個数は 6 個だから，$W\lambda$ の元の個数は，λ が一般の位置のときは 6

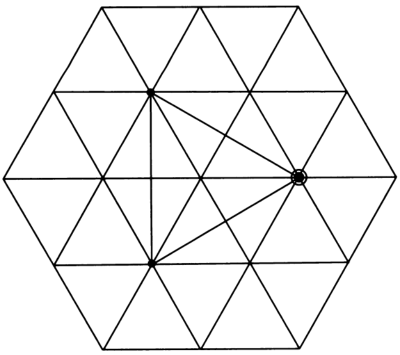


図 9.6　$(1,0)$ の凸包.

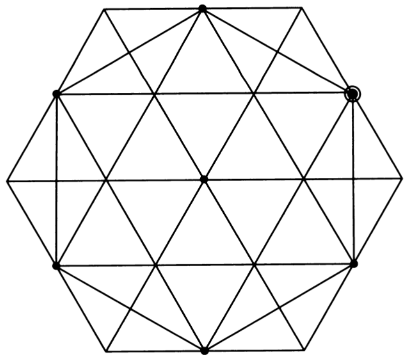


図 9.7　$(1,1)$ の凸包.

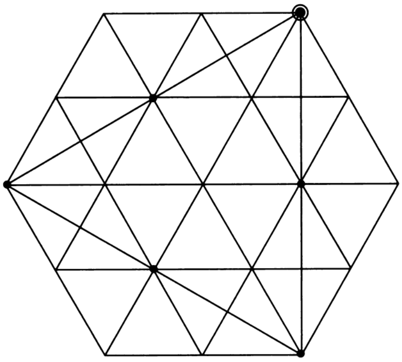


図 9.8　$(0,2)$ の凸包.

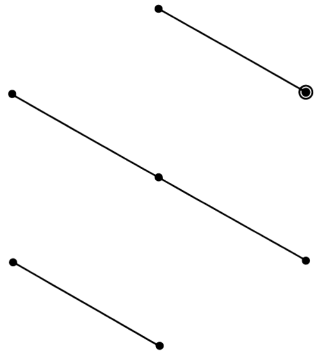


図 9.9　$\mathfrak{g}(\alpha_1)$ の作用.

個，λ がワイル群の壁の原点以外の点のとき 3 個，$\mu = 0$ のとき 1 個である．そして $W\mu \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ の凸包は，それぞれ，$W\lambda$ を頂点に持つ六角形の周および内部，三角形の周および内部，または 1 点 $\{0\}$ である．

π の任意のウェイトが λ の W-軌道 $W\lambda$ の凸包に含まれることは，例題 9.17 (2) より従う．

π のウェイト μ に対して，$\lambda - \mu$ が α_1 と α_2 の非負整数係数の一次結合になることは，例題 9.5，命題 9.1 (1) とその証明より従う．

定理の条件 1), 2) を満たす μ が π のウェイトであることは，$\alpha \in \Delta^+$ について $\mathfrak{g}(\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現を考え，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイトに関する結果（定理 8.6）を用いることにより示される．□

例題 9.21
最高ウェイトがそれぞれ $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ である $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の 3 つの既約有限次元表現について，最高ウェイトの凸包を図示せよ．

解答　図 9.6（三角形），図 9.7（六角形），図 9.8（三角形）の多角形の周および内部である．□

最高ウェイトが $(1,1)$ である $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現に $\mathfrak{g}(\alpha_1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は図 9.9 の斜めの線に沿って作用する．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現の分類より，黒丸の点がすべ

て $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ のウェイトとして現れることがわかる.(今の場合, 例題 9.8 よりこのことはわかっているが, このように $\alpha \in \Delta^+$ に対して $\mathfrak{g}(\alpha) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現に帰着するのが, 定理 9.3 の証明の後半部分の考え方である.)

演習問題 9.19

最高ウェイトが $2\lambda_1 + \lambda_2$ のとき, 定理 9.3 の証明の細部を補って確認せよ.

注意 9.3

(i) 任意の正ルートは, $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$ およびそれらの和 $\alpha_1 + \alpha_2 = e_1 - e_3$ である. 負ルートは符号を逆にしたもので, すべて α_1, α_2 の 0 以下の整数による一次結合の形をしている.

最高ウェイトベクトルの定義, そして半順序 $\succ$ の定義は, 単純ルート α_1, α_2 のとり方に依存している. α_1, α_2 のように角 $2\pi/3$ をなすルートの組は 6 通りあり, それらは $w\alpha_1, w\alpha_2$ $(w \in W)$ である. これを単純ルートとする正ルート系は $w\Delta^+$ である. $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現 (π, V) の (Δ^+ に基づく) 最高ウェイトを λ とするとき, $w\Delta^+$ を正ルートの集合にとると, $w\lambda$ が最高ウェイトになる. このように, ワイル群による対称性があるため, 最初に Δ^+ を固定して話を進めて問題なかったことがわかる.

(ii) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイト空間の次元はすべて 1 だが, $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の既約有限次元表現のウェイト空間の次元は 1 とは限らないことを注意しておく.

第 8 章と第 9 章で $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の場合に述べた, 最高ウェイトによる既約有限次元表現の分類は, カルタン (1913) によるものである. 一方, ワイルは, コンパクトリー群の既約有限次元表現を分類した. $SU(2)$ と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ あるいは $SU(3)$ と $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ の例で述べたように, コンパクト半単純リー群の有限次元表現論と複素半単純リー環の有限次元表現論は同等である (ワイルのユニタリ・トリック). 本書では, カルタン・ワイル理論と呼ばれる 20 世紀前半に確立された表現論を例で示した. (これと深く関連する, コンパクト群の表現の指標, ピーター・ワイルの定理については, 本書では触れていないが.)

カルタン・ワイル理論の詳細については, [1], [6], [7], [8], [13], [15], [16], [17], [27], [28], [29], [34], [38] を参照のこと. 本書の次の段階として, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, あるいは $SU(n)$ の既約有限次元表現について知るには, リー環やルート系の一般論を経ずに読める [17, Ch III] や [28, 第 8 章] がよいだろう.

本書ではまったく触れなかった, 非コンパクトリー群の無限次元表現については, [10], [11], [16], [17] を参照のこと.

第 10 章
極大トーラス

コンパクトリー群の構造や表現を調べる上で極大トーラスの概念が重要である．この章では，$SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ の極大トーラスを求め，その性質を調べる．

10.1 一般化された回転群の極大トーラス

閉線形群 G に対して，連結で可換な閉部分群を G の**トーラス**または**トーラス部分群**と呼ぶ．T を G のトーラス，$\mathfrak{t} = L(T)$ とすると，例題 6.7 より $T \simeq \mathbb{T}^{\dim \mathfrak{t}}$ および $\exp \mathfrak{t} = T$ が成り立つ．($\mathbb{T}^k$ については，定義 2.5，例題 6.4 も参照.)

$U(1) = \mathbb{T}, SO(2) \simeq \mathbb{T}$ である．また例題 2.13 で見たように，$\mathbb{T}^2 \simeq SO(2) \times SO(2)$ は $SO(4)$ のトーラスである．

$T \subset G$ が**極大トーラス**であるとは，T が G のトーラスであって，T' が T を含む G のトーラスならば $T' = T$ である，すなわち T は包含関係について極大な G のトーラス部分群であることをいう．

$\mathbb{T}^n$ は $U(n)$ の極大トーラスであることを例題 2.12 で示した．この章では，第 2 章で導入した一般化された回転群 $SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ の極大トーラスを与える．

まず $SO(3)$ の場合を考えよう．

例題 10.1
トーラス

$$\left\{ R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

は $SO(3)$ の極大トーラスであることを示せ．

解答 z 軸の周りの角 θ の回転 $R_z(\theta)$ の全体 T は $\mathbb{T}$ と同型な $SO(3)$ の部分群，すなわちトーラスである．T' を T を含む $SO(3)$ のトーラスとすると，$A \in T'$ は任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$AR_z(\theta) = R_z(\theta)A \tag{10.1}$$

を満たす．$\theta = \pi$ をとると，A が $R_z(\pi) = \mathrm{diag}(-1,-1,1)$ と可換であることから $A = \mathrm{diag}(A', a)$（A' は 2×2 行列，a はスカラー）の形をしていることがわかる．$A \in SO(3)$ より $A' \in O(2)$ である．例題 2.7 より $SO(2)$ に含まれない $O(2)$ の元は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

の形をしている．(10.1) より A' は $SO(2)$ の任意の元と可換であることがわかり，これより $A' \in SO(2)$，したがって，$A \in T$ がわかる．よって，$T' \subset T$，すなわち T が極大トーラスであることが示された． □

【解説】 上では行列の言葉を用いたが，線形変換の言葉では，(10.1) で $\theta = \pi$ とすると，A の表す直交変換は xy 平面を xy 平面に写すことがわかり，z 軸の周りの回転であることが従う．

例題 10.1 の解答は，T を含む $G = SO(3)$ の可換部分群は T に一致することを示している．すなわち T は $SO(3)$ の極大可換部分群になっている．同様のことは，他の古典型コンパクト群に対しても成立する．

例題 2.13 で見た $SO(2) \times SO(2) \simeq \mathbb{T}^2$ は $SO(4)$ の標準的な極大トーラスを与える．

例題 10.2

トーラス

$$T = \left\{ R(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} : \theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

は $SO(4)$ の極大可換部分群であり，したがって極大トーラスであることを示せ．

解答 $A \in SO(4)$ が T の任意の元と可換であるとする．$\mathbb{R}^4$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ とし，

$$A\boldsymbol{e}_1 = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + a_4\boldsymbol{e}_4$$

とおく．

$$AR(\pi,0)\boldsymbol{e}_1 = -A\boldsymbol{e}_1 = -a_1\boldsymbol{e}_1 - a_2\boldsymbol{e}_2 - a_3\boldsymbol{e}_3 - a_4\boldsymbol{e}_4,$$
$$R(\pi,0)A\boldsymbol{e}_1 = -a_1\boldsymbol{e}_1 - a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + a_4\boldsymbol{e}_4,$$

$AR(\pi,0)\boldsymbol{e}_1 = R(\pi,0)A\boldsymbol{e}_1$ より，$a_3 = a_4 = 0$，したがって，$A\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で張られる平面に含まれる．同様にして，

$$A\boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{e}_2 \in (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\text{-平面},$$
$$A\boldsymbol{e}_3,\ A\boldsymbol{e}_4 \in (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)\text{-平面}$$

であることが示される．$A \in SO(4)$ より $A \in SO(2) \times SO(2)$，すなわち $A \in T$ である．
□

$SO(n)$ の標準的な極大トーラスは，例題 10.1 や例題 10.2 で示したように，$SO(2)$ の元（と n が奇数のときは最後に 1）を対角ブロックとし，対角ブロック以外の成分がすべてゼロのブロック対角行列で与えられる．

命題 10.1
m を正整数とする．トーラス

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} : \theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R} \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} : \theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R} \right\}$$

は，それぞれ $SO(2m)$, $SO(2m+1)$ の極大可換部分群であり，したがって極大トーラスである．

演習問題 10.1
命題 10.1 を証明せよ．

$U(n)$, $SU(n)$ の標準的な極大トーラスは対角行列で与えられる．

命題 10.2
トーラス

$$\mathbb{T}^n \simeq T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le n)\},$$
$$\mathbb{T}^{n-1} \simeq T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le n), \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\}$$

は，それぞれ $U(n)$, $SU(n)$ の極大可換部分群であり，したがって極大トーラスである．

$U(n)$ の場合は既に例題 2.12 で示した．

演習問題 10.2
$SU(n)$ の場合に命題 10.2 を証明せよ．

$Sp(n)$ の標準的な極大トーラスは対角行列で与えられる．

命題 10.3
$Sp(n)$ の 2 つの実現（2.5 節および 2.7 節）に対して，トーラス

$$\eta_n(T) = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_n}) : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le n)\},$$
$$T = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}) : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le n)\}$$

$(T \subset Sp(n) \subset GL(n, \mathbb{H}),\ \eta_n(T) \subset Sp(n) \subset U(2n))$ は，$Sp(n)$ の極大可換部分群であり，したがって極大トーラスである．

2.7 節のように $Sp(n)$ を四元数を用いて実現し，$\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ により $U(n)$ を $Sp(n)$ の部分群と見なしたとき，命題 10.2 で与えた $U(n)$ の極大トーラスが $Sp(n)$ の極大トーラスになっているのである．

演習問題 10.3
命題 10.3 を証明せよ．

演習問題 10.4
T が閉線形群 G の極大トーラスであり $x \in G$ とするとき，$xTx^{-1} = \{xgx^{-1} : g \in T\}$ は G の極大トーラスであることを示せ．

10.2 閉線形群の中心

群の可換性に関連して重要な対象として，すべての元と可換な元全体，すなわち群の中心がある．群 G の**中心** $Z(G)$ とは，

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg\ ({}^\forall x \in G)\}$$

により定義される部分群をいう．

演習問題 10.5
$Z(G)$ は G の部分群であることを示せ．

上で与えた一般化された回転群 G の極大トーラス T は G の極大可換部分群だから，$Z(G)$ は T に含まれる．これを用いて $Z(G)$ を求めることができる．

例題 10.3
$SO(3)$ の中心は $\{\mathbf{1}\}$ であることを示せ．

解答 $SO(3)$ の中心の元は極大トーラス $T = \{R_z(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ の元と可換であり，例題 10.1 の解説より，T に含まれる．$g = R_z(\theta)$ が $R_y(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO(3)$（例題 1.2 の記号）と可換であることから，$\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$，したがって $g = R_z(0) = \mathbf{1}$ がわかる．$\mathbf{1}$ は $SO(3)$ の任意の元と可換だから，$Z(G) = \{\mathbf{1}\}$ である．
【別解】$g \in Z(G)$ とすると，上の議論より $g \in \{R_z(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$．$\mathbb{R}^3$ の基底を取り換えて考えれば，g は x, y 軸の周りの回転 $R_x(\theta), R_y(\theta)$ でもある．したがって $g = \mathbf{1}$． □

演習問題 10.6

群の同型 $SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm\mathbf{1}\}$（例題 5.9）を用いて次を示せ.

(1) $\{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}\}$ は $SU(2)$ の極大トーラスである.

(2) $Z(SU(2)) = \{\pm\mathbf{1}\}$.

> **例題 10.4**
> $SO(4)$ の中心は $\{\pm\mathbf{1}\}$ であることを示せ.

解答 $A \in Z(SO(4))$ とすると，例題 10.2 より $A = R(\theta_1, \theta_2) \in T$ である. $\mathrm{diag}(1,-1,1,-1) \in SO(4)$ が A と可換であることから $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = 0$，したがって $\cos\theta_j = \pm 1$ $(j = 1, 2)$ がわかる．対角成分がすべて等しいとき $A = \pm\mathbf{1} \in Z(SO(4))$ である．$A = \pm\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$ は

$$\begin{pmatrix} & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(4)$$

と可換でないから，$Z(SO(4))$ の元ではない．したがって，$Z(SO(4)) = \{\pm\mathbf{1}\}$ である.

□

> **例題 10.5**
> $Z(U(2)) = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}\}$, $Z(SU(2)) = \{\pm\mathbf{1}\}$ を示せ.

解答 $Z(U(2))$ は $U(2)$ の極大トーラス $\{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\}$ に含まれる. $\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ が $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in U(2)$ と可換であることから，$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ がわかる．単位行列のスカラー倍は $U(2)$ の任意の元と可換だから，$Z(U(2)) = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}\}$ である.

$SU(2)$ に対しても $U(2)$ の場合と同様にして $Z(SU(2))$ の元は単位行列のスカラー倍であることが示される．行列式が 1 であることから $Z(SU(2)) = \{\pm\mathbf{1}\}$ がわかる. □

演習問題 10.7

$U(2)/Z(U(2)) \simeq SO(3)$ か？

一般に次が成り立つ.

命題 10.4

一般化された回転群の中心は次で与えられる.

(i) $Z(SO(2m)) = \{\pm\mathbf{1}\}$ $(m \geq 2)$.

(ii) $Z(SO(2m+1)) = \{\mathbf{1}\}$.

(iii) $Z(U(n)) = \{z\mathbf{1} : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

(iv) $Z(SU(n)) = \{z\mathbf{1} : z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$.

(v) $Z(Sp(n)) = \{\pm\mathbf{1}\}$.

演習問題 10.8
命題 10.4 を証明せよ.

演習問題 10.9
$Z(SO(2))$ を求めよ.

演習問題 10.10
2 つの群が同型ならば，それらの中心は同型である．これを用いて次を示せ.
(1) $SO(3)$ と $SU(2)$ は同型でない.
(2) $U(n)$ と $SU(n) \times U(1)$ は同型でない.

例題 10.6
G を連結線形群，H を G の離散的な正規部分群とするとき，$H \subset Z(G)$ であることを示せ.

解答 H は正規部分群だから，$h \in H$ に対して，写像 $g \mapsto ghg^{-1}$ は G から H への連続写像を定める．G は連結集合，H は離散集合だから，像は一点 $\mathbf{1}h\mathbf{1}^{-1} = h$ でなければならない．任意の $g \in G$ に対して，$ghg^{-1} = h$ より，$h \in Z(G)$ である． □

演習問題 10.11
G を群とするとき，次を示せ.
(1) $Z(G)$ は G の正規部分群である.
(2) G が $Z(G)$ 以外に自明でない正規部分群を持たないならば，剰余群 $G/Z(G)$ は自明でない正規部分群を持たない.

演習問題 10.12
$SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ が自明でない正規部分群を持つかどうか調べよ．ただし，$\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$ が単純リー環であることを用いてよい.

10.3 極大トーラスの共役類

極大トーラスの共役はまた極大トーラスである（演習問題 10.4）が，前節で見た一般化された回転群の標準的な極大トーラスの共役は群全体を覆う．すなわち次が成り立つ.

定理 10.5
G を $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ のいずれか，T を命題 10.1，命題 10.2，命題 10.3 で与えた標準的な極大トーラスとする．このとき，

$$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$$

が成り立つ.

これは，任意の $y \in G$ に対して，ある $x \in G$ が存在して，$y \in xTx^{-1}$，すなわち

$x^{-1}yx \in T$ が成り立つということである．

G がユニタリ群またはシンプレクティック群のとき T は対角行列からなり，上の定理は行列の対角化に他ならない．

直交群の元は一般に実でない固有値を持つので，標準形として対角行列ではなく平面の回転の直積行列をとったと見ることができる．$G = SO(3)$ の場合，定理 10.5 は，任意の $y \in SO(3)$ に対して

$$x^{-1}yx = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる $x \in SO(3)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することを主張しているが，これは，$x^{-1}yx\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3$，すなわち $yx\boldsymbol{e}_3 = x\boldsymbol{e}_3$ より，$y \in SO(3)$ は $\mathbb{R}x\boldsymbol{e}_3$ を回転軸とする角 θ の回転であることを述べている．(このような $x \in SO(3)$, $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することは第 5 章で既に見た．)

例題 10.7
定理 10.5 を証明せよ．

解答 線形代数の復習問題である．

<u>$G = U(n)$ の場合</u> 任意の $A \in U(n)$ に対して，その固有ベクトルからなる正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{C}^n$ をとることができる．実際，A の固有方程式 $\det(A - \lambda\boldsymbol{1}) = 0$ は少なくとも 1 つの解 λ_1 を持つから，A は λ_1 を固有値とする固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を持つ．A は正則だから $\lambda_1 \neq 0$ である．固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は長さが 1 であるようにとっておく．
$\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ が $\boldsymbol{v}_1$ と直交するならば，$A\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ もまた $\boldsymbol{v}_1$ と直交する．実際，

$$(A\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{w}, A^{-1}\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{w}, \lambda^{-1}\boldsymbol{v}_1) = \bar{\lambda}^{-1}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1) = 0$$

である．したがって A は $\boldsymbol{v}_1$ の直交補空間

$$\boldsymbol{v}_1^{\perp} = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n : (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1) = 0\}$$

をそれ自身に写す．$\boldsymbol{v}_1^{\perp}$ は $n-1$ 次元の複素ベクトル空間で，A が表す線形変換の $\boldsymbol{v}_1^{\perp}$ への制限はユニタリ変換である．この操作を繰り返すことにより，A の固有ベクトル からなる正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{C}^n$ をとることができる．
対応する固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．すなわち $A\boldsymbol{v}_j = \lambda_j\boldsymbol{v}_j$ $(1 \leq j \leq n)$．$P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とすれば，P はユニタリ行列であり

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

を満たす．$P^{-1}AP$ はユニタリ行列であるから，$|\lambda_j| = 1$ $(1 \leq j \leq n)$ である．
$A \in SU(n)$ とすると，$U(n)$ の場合の結果より $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる $P \in U(n)$ が存在する．例題 2.5 より $|\det P| = 1$ である．$z^{-n} = \det P$ である $z \in \mathbb{C}$ をとれば，$zP \in SU(n)$ であり，$(zP)^{-1}A(zP) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in SU(n)$ である．
<u>$G = SO(n)$ の場合</u> $A \in SO(n) \subset SU(n)$ だから，絶対値 1 の複素数 λ とゼロでないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在して $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つ．λ が実数のとき，$\lambda = \pm 1$ であり，

固有ベクトルは実ベクトルにとることができる．λ が実数でないとき，複素共役をとると，$A\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$ も成り立つ．そして，

$$ {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tAA\boldsymbol{v} = {}^t(A\boldsymbol{v})A\boldsymbol{v} = \lambda^{2\,t}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} $$

より，${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = 0$ である．

$$ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n) $$

とおくと，

$$ {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2 + 2i\,{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = 0 $$

より，$|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ である．$\boldsymbol{v}$ を定数倍して，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が単位ベクトルであるようにとる．$|\lambda| = 1$, $\lambda \notin \mathbb{R}$ より，$\lambda = e^{-i\theta}$ $(\theta \notin \mathbb{Z}\pi)$ と表される．

$$ A\boldsymbol{x} = \frac{e^{-i\theta}}{2}\boldsymbol{v} + \frac{e^{i\theta}}{2}\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x}\cos\theta + \boldsymbol{y}\sin\theta, $$
$$ A\boldsymbol{y} = \frac{e^{-i\theta}}{2}i\boldsymbol{v} - \frac{e^{i\theta}}{2}i\bar{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{x}\sin\theta + \boldsymbol{y}\cos\theta $$

である．
A が定める直交変換 L_A が $\mathbb{R}^n$ の部分空間 V を不変にすれば，直交補空間 $V^\perp$ もまた L_A により不変である．したがって，$U(n)$ の場合と同様の操作を繰り返すことにより，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_m, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ $(2m + l = n)$ であって，P をこれらのベクトルを並べた直交行列とするとき，

$$ P^{-1}AP = \operatorname{diag}(B(\theta_1), \ldots, B(\theta_m), \lambda_1, \ldots, \lambda_l), \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

となるものが存在する．ここで $\lambda_j = \pm 1$ $(1 \leq j \leq l)$ である．$\det(P^{-1}AP) = 1$ だから，$\lambda_j = -1$ となる j は偶数個ある．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ を並べ替えて -1 を最初に集めておくと，$\operatorname{diag}(-1, -1) = B(\pi)$, $\operatorname{diag}(1, 1) = B(0)$ より，$P^{-1}AP$ が命題 10.1 で与えた T に含まれるような $P \in O(n)$ が存在する．$P \in SO(n)$ であればこれで証明が終わる．$P \in O(n) \setminus SO(n)$ のときは，$P_0 = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right) \in O(n) \setminus SO(n)$ とおくと，$P_0P \in SO(n)$, $P_0^{-1}TP_0 = T$ より $(P_0P)^{-1}AP_0P \in T$ である．
<u>$G = Sp(n)$ の場合</u>　2.7 節で見たように，$\eta_n(Sp(n)) \subset U(2n)$ は 2.5 節で与えた $Sp(n)$ の複素行列としての実現であり，可換図式

$$ \begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \\ {\scriptstyle L_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\eta_n(A)}} \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{C}^{2n} \end{array} $$

が成立している．$A \in Sp(n)$ に対して，$\eta_n(A)$ は固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $|\lambda_1| = 1$ と長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を持つ．$\eta_n(A)\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1$ より，$\boldsymbol{v}_1 = g_n^{-1}(\boldsymbol{u}_1)$ とおくと，$|\boldsymbol{v}_1| = 1$ であり，

$$g_n(A\boldsymbol{v}_1) = \eta_n(A)\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 = g_n(\lambda_1 \boldsymbol{v}_1)$$

より，$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ が成り立つ．

$U(n)$ の場合と同様の議論により，A は $\boldsymbol{v}_1^{\perp} \simeq \mathbb{H}^{n-1}$ を保つ．したがって，上と同様に，絶対値 1 の複素数 λ_2 と長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{H}^n$ が存在して，$A\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ．これを繰り返すと，$\mathbb{H}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と絶対値が 1 の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して $A\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$ が成り立つ．$P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in Sp(n)$ であり，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ が成り立つ． □

極大トーラスの共役はまた極大トーラスであることは容易にわかる（演習問題 10.4）が，任意の極大トーラスは互いに共役である．

定理 10.6

G を $SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ のいずれかとするとき，G の極大トーラスは互いに共役である．

定理 10.6 は，$SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ の任意の極大トーラスが，命題 10.1, 10.2, 10.3 で与えた標準的な極大トーラスと共役であることを示している．任意のコンパクト連結閉線形群（そしてより一般にコンパクト連結リー群）に対して，定理 10.6 が成り立つことが知られている（[28, §6.5 (a)], [34, §5.1] 参照）．

定理 10.6 は定理 10.5 と次のクロネッカーの近似定理から従う．

定理 10.7

T をトーラスとするとき，$a \in T$ が存在して，

$$\{a, a^2, a^3, \ldots\}$$

は T で稠密になる．

定理 10.7 の証明は [9, 定理 442] を参照されたい．

演習問題 10.13

定理 10.5 と定理 10.7 から定理 10.6 が従うことを示せ．

コンパクト閉線形群 G の極大トーラス T はそのリー環で特徴づけられる．G, T のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g} = L(G), \mathfrak{t} = L(T)$ とすると，$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分リー環になっている．$\mathfrak{g}$ の極大可換部分リー環を**カルタン部分環**と呼ぶ．

定理 10.8

G をコンパクト閉線形群，T を G の連結部分群とする．このとき，T が極大トーラスであることと $\mathfrak{t} = L(T)$ が $\mathfrak{g} = L(G)$ の極大可換部分リー環であることは同値である．特に，コンパクト閉線形群は極大トーラスを持つ．

[証明] 例題 4.5，例題 6.7 より，$\mathfrak{g}$ の可換部分リー環の全体と G のトーラス部分群の全体は 1 対 1 に対応するから，定理が従う．$\mathfrak{g}$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ は明らかに存在するから，G の極大トーラス $T = \exp \mathfrak{t}$ が存在する． □

例題 10.8

命題 10.1, 10.2, 10.3 で与えた $G = SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ のトーラス T のリー環 $\mathfrak{t}$ を求めよ. また, G のリー環 $\mathfrak{g} = L(G)$ について

$$\mathfrak{g} = \bigcup_{x \in G} \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t}$$

が成り立つことを示せ.

解答 先に与えた G の標準トーラス T のリー環を $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}}$ と書こう. 命題 10.1 で与えた $SO(n)$ の極大トーラスのリー環は, n の偶奇に応じて

$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{so}(2m)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & \\ \theta_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\theta_m \\ & & & \theta_m & 0 \end{pmatrix} : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le m) \right\},$$

$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{so}(2m+1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & & \\ \theta_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & -\theta_m & \\ & & & \theta_m & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} : \theta_j \in \mathbb{R} \quad (1 \le j \le m) \right\}$$

である. 命題 10.2 で与えた $U(n), SU(n)$ の極大トーラスのリー環は

$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{u}(n)} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \ldots, i\theta_n) : \theta_j \in \mathbb{R}\ (1 \le j \le n)\},$$
$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{su}(n)} = \{\mathrm{diag}(i\theta_1, \ldots, i\theta_n) : \theta_j \in \mathbb{R}\ (1 \le j \le n),\ \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\}$$

である. 命題 10.3 で与えた $Sp(n)$ の極大トーラスのリー環は

$$\mathfrak{t}_{\mathfrak{sp}(n)} = \{(i\theta_1, \ldots, i\theta_n, -i\theta_1, \ldots, -i\theta_n) : \theta_j \in \mathbb{R}\ (1 \le j \le n)\} \subset \mathfrak{sp}(n)\,(\subset \mathfrak{u}(2n))$$

である ($Sp(n)$ を四元数により実現して, 四元数の範囲で接ベクトル空間を考えれば, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{sp}(n)} \subset M(n, \mathbb{H})$ は $\mathfrak{t}_{\mathfrak{u}(n)}$ と同じ形をしている.)

$\mathfrak{g} = \bigcup_{x \in G} \mathrm{Ad}(x)\mathfrak{t}$ を示す. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ が $\{X \in \mathfrak{g} : ||X|| < r\}$ 上で単射であるように $r > 0$ を十分小さくとる. 証明したいのは線形空間の間の等式だから, $||X|| < r$ を満たす任意の $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{t}$ となる $g \in G$ が存在することを示せばよい. 定理 10.5, 例題 3.13 (1) より $g \in G$ が存在して, $ge^X g^{-1} = e^{\mathrm{Ad}(g)X} \in T$ が成り立つ. $||\mathrm{Ad}(g)X|| = ||X|| < r$ だから, $\mathrm{Ad}(g)X \in \mathfrak{t}$ でなければならない. □

【解説】 例題 6.7 より $\exp : \mathfrak{t} \to T$ は全射である. 具体的には, 命題 10.1, 10.2, 10.3 および例題 10.8 で与えた $G = SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ の極大トーラスとそのリー環について, θ_j でパラメーターづけられた $\mathfrak{t}$ と T の元は指数写像により対応している.

演習問題 10.14
G を $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ のいずれかとするとき，$\mathfrak{g} = L(G)$ のカルタン部分環は G の随伴作用で互いに共役であることを示せ.（これは，一般に G がコンパクトリー群の場合に成立する.）

極大トーラスの応用として次がわかる.

命題 10.9
(1) $G = SO(n), U(n), SU(n), Sp(n)$ に対して，$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全射である.
(2) G は連結である.

演習問題 10.15
命題 10.9 を証明せよ.

演習問題 10.16
例題 10.8 の $\mathfrak{t}$ が $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環であることを T が極大トーラスであることを使わずに直接確かめよ.

定理 10.5，命題 10.9 (1) は，コンパクト連結閉線形群に対して成立する（より一般にコンパクト連結リー群に対して成り立つ）. 次に定理として述べておくが，証明は [28, §6.5 (b)], [34, Theorem 5.12] 等を参照されたい.

定理 10.10
G をコンパクトな連結閉線形群とするとき，次が成り立つ.
(1) T を G の極大トーラスとするとき，$G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$ が成り立つ.
(2) 指数写像 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ は全射である.

コンパクト連結閉線形群 G に対して，G の極大トーラスの次元を G の**階数**と呼ぶ. G の階数は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環の次元である. また，階数は極大トーラスの取り方によらず決まる.

コンパクトリー群の極大トーラスはワイル (1925) によって研究された. $G = SO(n), SU(n), Sp(n)$ のリー環 $\mathfrak{g}$ とそのカルタン部分環 $\mathfrak{t} = L(T)$ （あるいは $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とそのカルタン部分環 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$）に対して，ルート系，ワイル群，最高ウェイト理論などの話題が，第 9 章で述べたのと同様の形で展開される. 表現論の文献については第 9 章の最後に記したが，古典型リー環のルート系については [23] も参照のこと.

付録 A
演習問題の方針，ヒント

演習問題の大部分は，例題や本文の流れを理解していれば容易に方針の立つ，理解を確認するための問題であるが，いくつかの問題について方針とヒントを記しておく．

演習問題 2.3 n 次対称群 $(n \geq 3)$.

演習問題 2.5 群について不慣れな読者は，代数の入門書も参照してほしい．

演習問題 2.7 例題 2.3 を参照して考える．

演習問題 2.20 (7) $f_n({}^t(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)) = {}^t(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$. また，$\rho_n(i\mathbf{1}) = -J_n$ であり，$A \in M(2n, \mathbb{R})$ に対する (3) の条件 $AJ_n = J_nA$ は，$f_n^{-1} \circ L_A \circ f_n$ が $\mathbb{C}^n$ の複素線形変換であるための必要十分条件である．

演習問題 2.24 例題 2.14 と同様．

演習問題 2.28 例題 2.17 と定義より従う．$n \geq 2$ に対して，$SL(n, \mathbb{H})$ はコンパクトでない．$n \geq 2$ のとき，$\eta_n(SL(n, \mathbb{H}))$ は $SU^*(2n)$ と記される古典型非コンパクト群の系列をなす．

演習問題 2.30 例題 2.20 (1) において，必要なら $\boldsymbol{x}_n$ を $-\boldsymbol{x}_n$ で取り換えれば，$g \in SO(n)$ にとれる．等方部分群を求める議論も同様．

演習問題 2.31 $U(n)$ の作用が推移的であることを示すには，例題 2.20 (1) と同様の議論において，エルミート内積に関する正規直交基底を考えればよい．

演習問題 3.3 $A(t) = B(t) \exp tX$ とおくと，$B'(t) = 0$, $B(0) = \mathbf{1}$ となることが容易にわかる．したがって，$B(t) = \mathbf{1}$ である．

演習問題 3.8 ${}^t \log A = \log {}^t A$ と例題 3.19 を使う．

演習問題 3.9 いずれも不成立．

演習問題 3.11 (1) $\begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} e^a \cosh b & e^a \sinh b \\ e^a \sinh b & e^a \cosh b \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{ac}{2}+b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

演習問題 4.1 例題 4.5 の解答と同様に議論する.

演習問題 4.3 (1) 例題 1.2 の $R_z(\theta)$. (2), (3) は，例題 3.13 (1) を使う.

演習問題 4.8 $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$ の像は，$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, x > -1$ を満たす $x \in SL(2,\mathbb{R})$ および $x = -\mathbf{1}$ からなる.

演習問題 4.13 (1) $\exp \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\alpha = 0$ のとき右辺の $(1,2)$ 成分は β).

演習問題 4.18 例題 4.3，例題 4.5 の解答の議論を参照.

演習問題 4.19 演習問題 2.20 を参照.

演習問題 5.4 (v) は例題 5.10 を書き直せばわかる．あるいは，本問の (iv) を用いても容易にわかる.

演習問題 5.6 (1) リーマン球面上の任意の点についてゼロをその点に写すメービウス変換は容易に求められる．ゼロにおける等方部分群は $(1,2)$ 成分がゼロの元からなる $SL(2,\mathbb{C})$ の部分群である（ボレル部分群と呼ばれる）．(2) 2 つの半球（$x_2 > 0$ または $x_2 < 0$ の部分）および 1 つの大円（$x_2 = 0$ の部分）.

演習問題 5.7 「quaternion handshake」をウェブで検索すると動画が見つかる.

演習問題 5.9 正規部分群 $Sp(1) \times \{1\} \subset Sp(1) \times Sp(1)$ の例題 5.19 の写像による像を考えればよい.

演習問題 6.1 $I_n = (0, 1 + 1/n)$ の交わりは $(0, 1]$.

演習問題 6.8 例題 2.19 を参照.

演習問題 6.19 例題 6.2 参照.

演習問題 6.22 $SU(n)$ の元の 1 列目に $U(1)$ の元をかける写像は $SU(n) \times U(1)$ から $U(n)$ への同相写像を与える.（これは群の同型写像ではない.）

演習問題 6.24 (1) 例題 5.9 参照. (2) 演習問題 6.28 および (1) より $SO(3)$ は S^3 の対蹠点を同一視したものと同相になる．(3) 例題 5.19 参照.

演習問題 7.8 定理 6.4，定理 7.3 より従う.

演習問題 7.11 例題 7.7 より容易にわかる．等方部分群は順に { 対角行列 }, $SO(2)$, {$(2,1)$ 成分がゼロの行列 }, $SL(2,\mathbb{R})$ である.

演習問題 7.12 定理 6.4 の (iv) $\Longrightarrow$ (i) の証明と同様.

演習問題 8.6 $V_m \otimes V_n$ の元が最高ウェイトベクトルになるための条件を調べることによ

り，最高ウェイト $m+n, m+n-2, \ldots, |m-n|$ を持つ最高ウェイトベクトルが存在することがわかる．それぞれのベクトルにより生成される既約表現は互いに $\{0\}$ 以外の共通部分を持たない．次元を比較することにより，$V \otimes W$ がこれらの表現空間の直和に等しいことがわかる．

演習問題 8.8 $A_1 \circ A_2^{-1}$ は W から W への同型な絡作用素になる．これに定理 8.14 (2) を適用する．

演習問題 8.9 演習問題 8.10 の方針を参照．

演習問題 8.10 G は可換群，(Π, V) を G の既約有限次元とすると，任意の $x \in G$ に対して $\Pi(x)$ は絡作用素であることがわかる．シューアの補題より $\Pi(x)$ はスカラー，したがって V の任意の部分空間は不変部分空間である．既約性より V は 1 次元でなければならない．

演習問題 9.2 例題 5.1 (2) を参照せよ．

演習問題 9.4 V_λ のゼロでない元が最高ウェイトベクトルでないとすると，λ に正ルートを足したものがウェイトになり，$\succ$ について最高であることに矛盾する．

演習問題 9.5 $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して，$\mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3)\boldsymbol{v} = {}^t(h_1 v_1, h_2 v_2, h_3 v_3)$, $E_{12}\boldsymbol{v} = {}^t(v_2, 0, 0)$, $E_{23}\boldsymbol{v} = {}^t(0, v_3, 0)$, $E_{13}\boldsymbol{v} = {}^t(v_3, 0, 0)$ より，最高ウェイトベクトルは $\boldsymbol{e}_1$，最高ウェイトは λ_1 であることがわかる．また，$\{0\}$ でない不変部分空間 W の元 $\boldsymbol{v}$ に $E_{ij}\,(i<j)$ を作用させると，上式より $\boldsymbol{e}_1 \in W$ がわかる．$E_{ij}\,(i>j)$ を作用させることにより，$W = \mathbb{C}^3$ となり，既約性が従う．

演習問題 9.13 命題 9.1 (i) およびその証明よりわかる．

演習問題 10.1 例題 10.1，例題 10.2 と同様に議論する．

演習問題 10.2 例題 2.12 と同様に議論する．たとえば，T の元 $\mathrm{diag}(-1, -1, 1, \ldots, 1)$ および $\mathrm{diag}(-1, 1, -1, 1, \ldots, 1)$ と可換であることから，$\mathbb{R}\boldsymbol{e}_1$ を保つことがわかる．

演習問題 10.3 $U(n)$ の場合と同様．

演習問題 10.4 共役 $g \mapsto xgx^{-1}$ は G の自己同型写像だから，極大トーラスの定義より容易にわかる．

演習問題 10.8 例題 10.3，例題 10.4，例題 10.5 と同様に議論する．

演習問題 10.11 群 G の自明な正規部分群とは，$\{e\}$ と G 自身のことを指す．

演習問題 10.12 命題 4.3，例題 10.6 を使う．例題 5.1 の解説も参照せよ．

演習問題 10.14 定理 10.8 を使う．

演習問題 10.15 例題 3.13，例題 6.7，定理 10.5 より従う．

演習問題 10.16 $X \in \mathfrak{g}$ が任意の $Y \in \mathfrak{t}$ と可換ならば，$X \in \mathfrak{t}$ となることを示す．

参考文献

[1] T. Bröcker, T.t. Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer–Verlag, 1985.

[2] C. Chevalley, *Theory of Lie groups* I, Princeton University Press 1946.

[3] J.H. コンウェイ／D.A. スミス『四元数と八元数　幾何，算術，そして対称性』培風館，2006.

[4] M.L. Curtis, *Matrix Groups*, Springer–Verlag, 1979.

[5] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[6] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, *Lie Groups*, Springer–Verlag, 2000.

[7] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, Springer–Verlag, 1991.

[8] B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer, 2003.

[9] G.H. ハーディ/E.M. ライト『数論入門 II』シュプリンガー・フェアラーク東京，2001.

[10] 平井武『線形代数と群の表現 I, II』朝倉書店，2001.

[11] 平井武・山下博『表現論入門セミナー』遊星社，2003.

[12] R. Howe, Very basic Lie theory, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 600–623; correction in **91** (1984), 247.

[13] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer–Verlag, 1972.

[14] 伊勢幹夫・竹内勝『リー群論』岩波書店，1992.

[15] A. Kirillov, Jr., *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge, 2008.

[16] A.W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups*, Princeton University Press, 1986.

[17] A.W. Knapp, *Lie Groups, Lie Algebras, and Cohomology*, Princeton University Press, 1988.

[18] A.W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction* Second Edition, Birkhäuser, 2002.

[19] A.W. Knapp, Review of Lie Groups: An Introduction Through Linear Groups by Wulf Rossmann, *American Mathematical Monthly* **110** (2003), 446–455.

[20] 河野俊丈『新版 組みひもの数理』遊星社，2009.

[21] 熊原啓作『行列・群・等質空間』日本評論社，2001.

[22] S. ラング『ラング線形代数学 (下)』ちくま学芸文庫，2010.

[23] 松木俊彦『リー群入門』日本評論社，2005.

[24] 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店，1968.

[25] 松島与三『多様体入門』裳華房，1965.

[26] J. von Neumann, Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, *Mathematische Zeitschrift* **30** (1929), 3–42.

[27] 岡田聡一『古典群の表現論と組合せ論 上・下』培風館，2006.

[28] 大島利雄・小林俊行『リー群と表現論』岩波書店，2005.

[29] W. Rossmann, *Lie Groups*, Oxford, 2002.
[30] 佐武一郎『線型代数学』裳華房，1974.
[31] 斎藤正彦『線型代数入門』東京大学出版会，1966.
[32] 佐武一郎『リー群の話』日本評論社，1982.
[33] 佐武一郎『リー環の話』日本評論社，1987.
[34] M.R. Sepanski, *Compact Lie Groups*, Springer, 2007.
[35] J. Stillwell, *Naive Lie Theory*, Springer–Verlag, 2008.
[36] 日本数学会編集『数学辞典 第 4 版』岩波書店，2007.
[37] 杉浦光夫・山内恭彦『連続群論入門』培風館，1960.
[38] 谷崎俊之『リー代数と量子群』共立出版，2002.
[39] K. Tapp, *Matrix Groups for Undergraduates*, American Mathematical Society, 2005.
[40] G. Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.
[41] 横田一郎『群と位相』裳華房，1971.

索　　引

欧字・記号

[,], 39

$\mathbf{1}$, 3

α_1, 136

α_2, 136

Δ, 136

Δ^+, 137

det, 4

diag, 12

E, 58

$\boldsymbol{e}_j$, 26

E_{jk}, 36

e^X, 35

$\exp X$, 35

F, 58

$\mathfrak{g}(\alpha)$, 137, 140

$\mathfrak{g}_\alpha$, 136

$GL(n,\mathbb{C})$, 19

$GL(n,\mathbb{H})$, 26

$GL(n,\mathbb{K})$, 19

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, 50

$GL(n,\mathbb{R})$, 19

G/H, 9

H, 58

$\mathbb{H}$, 23

$\mathfrak{h}$, 135

H_λ, 136

$\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, 137

id, 10

J_n, 17

$L(G)$, 50

$L(\Phi)$, 107

λ_1, 139

λ_2, 139

Λ_R, 141

Λ_W, 140

$M(n,\mathbb{C})$, 15

$M(n,\mathbb{K})$, 34

$M(n,\mathbb{R})$, 14

$O(2)$, 12

$O(n)$, 14

$\mathfrak{o}(n)$, 55

$O(n,1)$, 15

$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$, 55

$O(p,q)$, 15

S^1, 11

$SL(n,\mathbb{C})$, 19

$SL(n,\mathbb{H})$, 29

$SL(n,\mathbb{K})$, 19

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, 57

$SL(n,\mathbb{R})$, 19

$\mathfrak{sl}_2$-トリプル, 138

S^{n-1}, 29

$SO(2)$, 3, 10

$\mathfrak{so}(2)$, 3

$SO(3)$, 4, 70

$\mathfrak{so}(3)$, 5, 70

$SO(4)$, 21, 83

$SO(n)$, 14

$\mathfrak{so}(n)$, 53

$SO(n,1)$, 15

$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$, 53

$SO(p,q)$, 15

$Sp(1)$, 18, 29, 83

$Sp(n)$, 17, 27

$\mathfrak{sp}(n)$, 53, 59

$Sp(n,1)$, 27

$Sp(n,\mathbb{C})$, 21

$Sp(n,\mathbb{K})$, 21

$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K})$, 58
$Sp(n, \mathbb{R})$, 21
$Sp(p, q)$, 27
$SU(1, 1)$, 17, 32
$SU(2)$, 16, 29
$\mathfrak{su}(2)$, 58
$SU(n)$, 15
$\mathfrak{su}(n)$, 57
$SU(n, 1)$, 17
$\mathfrak{su}(n, 1)$, 58
$SU(p, q)$, 17
$SU^*(2n)$, 29
$\mathrm{Sym}^k V$, 145
$\mathbb{T}$, 1, 11
$T^k V$, 145
$\mathrm{Tr}\, X$, 37
$U(2)$, 16
$U(n)$, 15
$\mathfrak{u}(n)$, 53
$U(n, 1)$, 17
$U(p, q)$, 17
V_λ, 139
W, 150
$\bigwedge^k V$, 145
$\mathbb{Z}_\geq$, 141

ア

位相, 86
位相空間, 88
位相同型, 87
位相不変量, 100
1 形式, 132
1 次元複素射影空間, 81
一次分数変換, 78
一様連続, 87
一般線形群, 19, 26
一般線形リー環, 65
イデアル, 69
ウェイト, 119, 139
ウェイト空間, 119, 139
ウェイト格子, 140
ウェイト図形, 143
ウェイトベクトル, 139
エルミート内積, 15
エンゲル, 69
オイラー角, 77

カ

開球, 85
開集合, 85, 88
階数, 11, 167
外積, 25
解析的部分群, 115
回転群, 4
回転軸, 71
可換, 9, 65
核, 9
拡張された複素平面, 78
カッコ積, 6, 39, 65
カルタン, 69
カルタン・デュドネの定理, 33
カルタン部分環, 135, 165
カルタン・ワイル理論, 156
完全可約, 129
簡約, 69
軌道, 31
軌道分解, 31
ギブズ, 84
基本ウェイト, 139
基本群, 101
基本表現, 144
既約, 120
キャンベル・ベイカー・ハウスドルフの公式, 46, 64
鏡映, 13, 33, 83, 153
鏡映群, 153
共役, 24
行列群, 19, 114
行列の指数関数, 3, 35
局所座標, 97, 132
極大トーラス, 21, 146, 150, 157
極分解, 23, 91
距離, 85
キリング, 69
空間の回転群, 4, 70
クォータニオン, 24
クロネッカーの近似定理, 96, 165

群, 7
ケイリー, 84
交代テンソル積, 145
合同変換, 12
コーシー列, 86
弧状連結, 72, 74, 88
弧状連結成分, 89
古典型単純リー環, 69
コンパクト集合, 86

サ

最高ウェイト, 122, 141
最高ウェイト定理, 149
最高ウェイトベクトル, 122, 141
座標近傍, 97
座標近傍系, 97
作用する, 30
3 次元実射影空間, 73
次元, 111
四元数, 24
四元数体, 24, 75
辞書式順序, 137
指数写像, 35
指数法則, 39
自然表現, 73, 111, 116, 142, 151
実形, 60, 67
支配的整ウェイト, 146
射影空間, 73
斜交群, 18
斜体, 24
シューアの補題, 133
集積点, 86
純四元数, 24
準同型写像, 9, 65
準同型定理, 9
商空間, 89
剰余群, 9, 11
シンプレクティック群, 18, 21, 27
シンプレクティック形式, 17, 18
シンプレクティックリー環, 66
推移的, 30
随伴行列, 15
随伴表現, 68, 111, 136
ステレオグラフィック射影, 80
スピノル群, 101
整ウェイト, 146
正規部分群, 8
斉次座標, 81
生成される, 120
正定値, 42
積空間, 88
接空間, 50
絶対値, 24
接ベクトル, 1, 3, 4, 50
線形群, 114
線形リー環, 66
線形リー群, 19
双線形, 15, 18, 65, 127
相対位相, 86
双対空間, 136
双対表現, 143

タ

対称群, 8, 150
対称テンソル積, 145
多様体, 97
単位円板, 32
単位球面, 29
単位四元数, 24
単純, 69, 70
単連結, 100
置換行列, 151
忠実, 30
中心, 69, 160
稠密, 89
重複度, 139
直交行列, 3, 12
直交群, 14
直交変換, 12, 14
直交補空間, 163
直交リー環, 66
直積群, 8
直線のアファイン変換群, 22
直和, 112
ディンキンの公式, 64, 104
テンソル積, 127, 128

テンソル積表現, 126, 127, 145
転置行列, 3
同型, 20, 65
同型写像, 9, 65
等質空間, 30
同相, 87
同相写像, 20, 80, 87
同値, 119
等方部分群, 30
トーラス, 11, 157
トーラス部分群, 157
特殊線形群, 19
特殊線形リー環, 66
特殊直交群, 14
特殊ユニタリ群, 15
凸包, 154
トレース, 37

ナ

滑らか, 97
滑らかな曲線, 4, 50
2 重被覆, 84
ノルム, 37

ハ

バーマ加群, 125
ハイネ・ボレルの定理, 87
ハウスドルフ空間, 97
ハウスドルフの公式, 46
パウリ行列, 77
ハミルトン, 24, 84
反傾表現, 143
反対称, 18
半単純, 69
非退化, 18
左ハール測度, 131
被覆, 87
被覆群, 113
微分, 68, 107
微分可能多様体, 97
微分表現, 111
表現, 69, 110
表現空間, 111
標準基底, 26
フォン・ノイマン, 98
複素化, 59, 60
複素直交群, 21
複素特殊直交群, 21
不定値シンプレクティック群, 27
不定値直交群, 15
不定値ユニタリ群, 17
部分群, 8
部分表現, 120
部分リー環, 66
普遍被覆群, 101
不変部分空間, 120
普遍包絡環, 148
分配代数, 68
閉集合, 85
閉線形群, 19, 89
閉部分群, 19
閉部分集合, 19
閉包, 89
平面の回転群, 1, 10
ベクトル積, 25
変形, 99
ホモトピー, 99

マ

右剰余類, 8
道, 88
メービウス変換, 78

ヤ

ヤコビ恒等式, 52, 65
有界集合, 86
ユニタリ群, 15
ユニタリ内積, 130
ユニタリ表現, 129
ユニタリ変換, 15
余接空間, 132

ラ

絡作用素, 133
リー, 49
リー環, 1, 50, 52, 65

リー群, 1, 89, 98
リー代数, 65
リーの対応, 94
リーマン球面, 81
リー理論, 6
離散集合, 88
離散線形群, 95
離散部分群, 95
立体射影, 80
ルート, 136
ルート空間, 136
ルート空間分解, 136
ルート系, 136
ルート格子, 141
ルートベクトル, 136
例外型単純リー環, 69
連結, 94
連結成分, 89
連続, 87
ローレンツ群, 15
ロドリーグ, 84

ワ

ワイル群, 149, 150
ワイル群の壁, 153
ワイルのユニタリ・トリック, 121
ワン・パラメーター群, 40
ワン・パラメーター部分群, 40

著者略歴

示野 信一
しめの のぶかず

1964 年　石川県金沢市に生まれる
1986 年　東京大学理学部数学科卒業
1993 年　東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了
　　　　博士 (数理科学)
　　　　東京都立大学助手，岡山理科大学准教授を経て
2009 年　関西学院大学理工学部数理科学科教授
専　門　対称空間上の解析学，リー群の表現論
主要著書
『Maple V で見る数学ワールド』，
訳書にハーディ/ライト著『数論入門 I,II』など．

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-88
『演習形式で学ぶ リー群・リー環』

著　者　示野 信一

2012 年 3 月 25 日　初版発行

数理科学編集部　　発行人　木下敏孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒151-0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-3-25　振替 00170-7-2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博